

Praxisorientierte Einführung in die Numerik im
Sommersemester 2021
Lernskript
Stand 29. Juni 2021, 16:32:50

Frank Wübbeling

29. Juni 2021

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Hauptbeispiele der Vorlesung und einfache numerische Verfahren | 6 |
| 1.1 | Differentialgleichungen: Grundbegriffe | 6 |
| 1.2 | Euler-Verfahren | 9 |
| 1.3 | Federbeispiel | 11 |
| 1.4 | Stationäre Wärmeleitungsgleichung | 11 |
| 1.5 | Google-Matrix | 13 |
| 2 | Referenz zur linearen Algebra | 14 |
| 2.1 | Normierte Vektorräume | 14 |
| 2.2 | Lineare Operatoren | 16 |
| 3 | Fehler beim numerischen Rechnen | 20 |
| 3.1 | Fehlerdefinitionen | 20 |
| 3.2 | Fehlerverstärkung | 21 |
| 3.3 | Maschinendarstellung reeller Zahlen | 24 |
| 3.4 | Stabilität | 26 |
| 3.5 | Induzierte Matrixnorm | 27 |
| 3.6 | Fehler bei linearen Gleichungssystemen | 31 |
| 4 | Direkte Lösung linearer Gleichungssysteme | 36 |
| 4.1 | Gauß-Elimination und LR -Zerlegung | 36 |
| 5 | Über- und unterbestimmte Gleichungssysteme | 45 |
| 5.1 | Kleinste Quadrate-Lösung | 45 |
| 5.2 | Die Minimum Norm-Lösung | 49 |
| 5.3 | Die Pseudoinverse | 52 |
| 6 | Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme | 54 |
| 6.1 | Der Banachsche Fixpunktsatz | 54 |
| 6.2 | Iterative Fixpunktverfahren für lineare Gleichungen | 59 |
| 6.3 | Infimum der induzierten Matrixnormen | 62 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 6.4 | Satz von Gerschgorin | 63 |
| 6.5 | Zeilensummenkriterien | 65 |
| 7 | Das Newton–Verfahren | 67 |
| 8 | Eigenwerte | 71 |
| 9 | Interpolation | 77 |
| 9.1 | Polynominterpolation | 77 |
| 9.2 | Splines | 82 |
| 10 | Anwendungen der Polynominterpolation | 85 |
| 10.1 | Numerische Differentiation | 85 |
| 10.2 | Numerische Integration: Newton–Cotes–Formeln | 87 |
| 10.3 | Richardson–Extrapolation | 91 |
| 11 | Anfangswertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen | 93 |
| 12 | Diskrete Lösung von Anfangswertaufgaben | 102 |
| 13 | Konvergenz und Konsistenz für implizite Einschrittverfahren | 111 |
| 14 | Anwendungen und Implementation | 115 |
| 14.1 | Runge–Kutta–Verfahren | 115 |
| 14.2 | Energieerhaltung | 118 |
| 14.3 | Fehlerabschätzung und Schrittweitensteuerung | 118 |
| 15 | Lineare Mehrschrittverfahren | 120 |
| 16 | Stabilität von Mehrschrittverfahren | 126 |
| 17 | A–Stabilität für Einschrittverfahren | 132 |
| 18 | Randwertprobleme | 135 |
| 18.1 | Schießverfahren | 139 |
| 18.2 | Diskretisierungsverfahren | 140 |
| 18.3 | Variationsmethoden | 145 |
| 18.4 | Sobolevräume | 150 |
| 18.5 | Existenz– und Eindeutigkeitssatz für das Sturm–Liouville– Modellproblem | 154 |
| 18.6 | Numerische Verfahren für variationelle Probleme | 157 |
| 19 | Errata | 161 |

| | |
|-----------------------------|------------|
| 19.1 Errata 2021 | 161 |
| 19.2 Errata 2020 | 162 |
| Literaturverzeichnis | 164 |

Vorwort

Dieses Skript entsteht zur Online–Vorlesung Praxisorientierte Einführung in die Numerik. Es stellt ausgewählte Kapitel der Vorlesungen Numerische Lineare Algebra und Numerische Analysis im Anwendungszusammenhang vor.

Hauptthema der Vorlesung ist die numerische Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Auf dem Weg zu diesem Ziel führen wir zunächst grundlegende Techniken zur Numerik ein: Fehlerrechnung, (direkte und iterative) Lösung von linearen und nichtlinearen Gleichungssystemen, Berechnung von Eigenwerten, Interpolation, numerische Integration und Differentiation.

Achtung: Dies ist ein Lernskript und fasst die wesentlichen Ideen (Definitionen und Sätze) der Vorlesung pro Veranstaltung zusammen. Beweise, Motivationen und Hintergründe finden Sie jeweils in der angegebenen Hintergrundliteratur, am einfachsten in meinen Skripten zur Numerischen Linearen Algebra und zur Numerischen Analysis.

Kapitel 1

Hauptbeispiele der Vorlesung und einfache numerische Verfahren

1.1 Differentialgleichungen: Grundbegriffe

Für die Hauptbeispiele benötigen wir Differentialgleichungen. Wir erinnern an die Definitionen.

Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung, in der eine Ableitung einer (unbekannten) Funktion y auftaucht. Lösung der Differentialgleichung ist eine konkrete Funktion y , die die Gleichung erfüllt. **Lösung einer Differentialgleichung ist immer eine Funktion.**

y kann eine Funktion in einer Variablen (gewöhnliche Differentialgleichung) oder in mehreren Variablen (partielle Differentialgleichung) sein. Wir werden im Rahmen dieser Vorlesung ausschließlich gewöhnliche Differentialgleichungen betrachten.

Ausdrücklich zugelassen ist, dass y eine Funktion in den \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n ist. Falls $n = 1$, so heißt die Gleichung skalar.

Für $n > 1$ haben wir n Koordinatenfunktionen, entsprechend müssen n Gleichungen gegeben sein. Die Gleichungen heißen System von Differentialgleichungen.

Es ist zugelassen, dass höhere Ableitungen von y in der Gleichung auftauchen. Die Ordnung der höchsten Ableitung heißt Grad der Differentialgleichung.

Einige Beispiele:

1.

$$y : [a, b] \mapsto \mathbb{R}, y'(t) = cy(t)$$

(Lineare) skalare gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung. Eine Lösung ist

$$y(t) = e^{ct}.$$

2.

$$y : [a, b] \mapsto \mathbb{R}, y'(t) = c(t)y(t), c : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$$

(Allgemeine lineare) skalare gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung. Eine Lösung ist

$$y(t) = e^{\int_a^t c(s) ds}.$$

3.

$$y : [a, b] \mapsto \mathbb{R}, y''(t) = -y(t)$$

Skalare Differentialgleichung 2. Ordnung. Lösungen sind $\cos t$ und $\sin t$.

4.

$$y : [a, b] \mapsto \mathbb{R}, y'(t) = 1 + y(t)^2$$

Skalare Differentialgleichung 1. Ordnung. Eine Lösung ist $\tan x$.

5.

$$y = (H(t), F(t)), H, F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}, y : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^2$$

$$H'(t) = aH(t) - cH(t)F(t)$$

$$F'(t) = -bF(t) + cH(t)F(t)$$

oder

$$y'(t) = (H'(t), F'(t)) = (aH(t) - cH(t)F(t), -bF(t) + cH(t)F(t)) =: f(y(t))$$

System von 2 Differentialgleichungen in 2 Funktionen $(F(t), H(t))$ oder in der 2-dimensionalen Funktion y .

(Räuber-Beute-Modell, Lotka-Volterra-Differentialgleichung)

6.

$$y : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) (t, x, y) = \frac{\partial u}{\partial t} (t, x, y)$$

Partielle Differentialgleichung 2. Ordnung in 2 Dimensionen (Wärmeleitungsgleichung), siehe 2. Hauptbeispiel.

7.

$$y : [a, b] \mapsto \mathbb{R}, u''(x) = -s(x)$$

Skalare stationäre Wärmeleitungsgleichung in einer Dimension, siehe 2. Hauptbeispiel.

Die Lösungen von Differentialgleichungen sind im Allgemeinen nicht eindeutig. Wir brauchen daher noch zusätzliche Bedingungen. Wir betrachten zwei Bedingungen, die zu völlig unterschiedlichen numerischen Algorithmen führen.

1. Anfangswertaufgaben: Hier ist ein y_0 gegeben mit $y(a) = y_0$. Für Systeme von Differentialgleichungen muss also für jede Koordinatenfunktion ein Anfangswert vorgegeben werden, im Räuber–Beute–Modell müssen also $F(a)$ und $H(a)$ vorgegeben sein.
2. Randwertprobleme: Für gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung oder Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen sind häufig Bedingungen bei a und b , also auf dem gesamten Rand, vorgegeben. In diesem Fall sprechen wir von Randwertproblemen.
Beispiel: Skalare stationäre Wärmeleitungsgleichung mit $y(a) = y(b) = 0$ (siehe 2. Hauptbeispiel).

Für Anfangswertprobleme kann man die Aufgabe so formulieren: Bei $t = a$ ist die Funktion bekannt. Setze die Funktion fort unter Berücksichtigung der Differentialgleichung. Mit dem Satz von Picard–Lindelöf gilt: Diese Fortsetzung ist zumindest auf einem Teilintervall von $[a, b]$ möglich, falls f Lipschitz–stetig ist in der zweiten Variablen.

Bei Randwertproblemen ist dies nicht möglich, weil man keinen Anfangspunkt hat, sondern die Bedingungen von links und rechts beachten muss. Man erhält ein (lineares) Gleichungssystem, in dem der linke und rechte Randwert vorkommen.

Wir betrachten bei Anfangswertproblemen nur (Systeme von) Gleichungen erster Ordnung und nehmen an, dass die einzelnen Gleichungen jeweils nach y'_k aufgelöst sind (Normalform). Die einzelnen Gleichungen sind also von der Form

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

mit

$$y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)), y'(t) = (y'_1(t), \dots, y'_n(t)), f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n.$$

Alle Beispiele oben sind bereits in dieser Form gegeben, mit Ausnahme der stationären Wärmeleitungsgleichung, denn diese ist von der Ordnung 2. Tatsächlich

lässt sich mit einem einfach Trick jede Gleichung höherer Ordnung in ein System von Gleichungen erster Ordnung umwandeln. Am Beispiel der stationären Wärmeleitungsgleichung:

Wir führen die zusätzliche Funktion $v(x) = u'(x)$ ein. Dann erhalten wir das System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}v'(x) &= u''(x) = -s(x) \\ u'(x) &= v(x)\end{aligned}$$

und dieses ist in Normalform, denn alle Gleichungen sind von erster Ordnung und jeweils nach der ersten Ableitung aufgelöst. Wir können uns also tatsächlich bei der Betrachtung auf die Normalform beschränken.

1.2 Euler–Verfahren

Das Euler–Verfahren ist das einfachste numerische Verfahren zur Lösung von Anfangswertaufgaben. Wir wollen es auf zwei Arten motivieren. Sei dazu das skalare Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), y(a) = y_0$$

gegeben und zu lösen auf dem Intervall $[a, b]$.

Graphische Lösung: Wir kennen also den Wert der Funktion $y(t)$ an der Stelle $t = a$ und wollen sie nach rechts fortsetzen. Da y die Differentialgleichung erfüllt, gilt auch

$$y'(a) = f(a, y(a)).$$

Wir kennen also auch die Ableitung der Funktion an der Stelle $t = a$. Die Ableitung ist die Tangentensteigung, also kennen wir die Tangente an $y(t)$ im Punkt $(a, y(a))$. Die Geradengleichung der Tangente ist

$$z(t) = y_0 + (t - a) \cdot y'(a).$$

In einer sehr kleinen Umgebung von a stimmen die Tangente z und die Kurve y fast überein, d.h. dort ist die Tangente eine gute Näherung für die Funktion (siehe Abbildung 1.1).

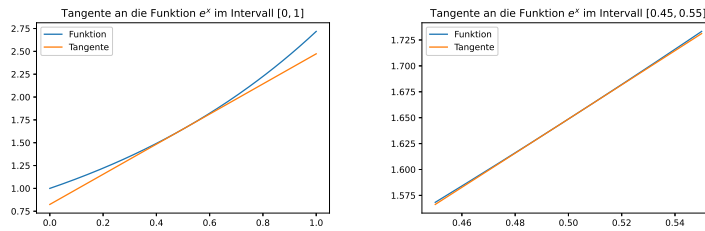


Abbildung 1.1: Tangente an e^x im Punkt $x = 0.5$.
 Auf dem kleinen Intervall ist die Tangente eine gute Approximation für e^x .

Das Eulerverfahren geht nun so vor: Im Intervall werden $(N - 1)$ Punkte t_1, \dots, t_{N-1} zwischen $t_0 = a$ und $t_N = b$ mit gleichem Abstand $h = (b - a)/N$ (äquidistant) eingefügt. Es gilt also $t_k = a + kh$.

An den Punkten $t_k, k = 0 \dots N$, wollen wir Näherungen y_k für $y(t_k)$ berechnen.

Wir gehen wie geplant von links nach rechts vor. Für $k = 0$ wissen wir $y(t_0) = y(a) = y_0$. Um eine Näherung für y an der Stelle t_1 auszurechnen, stellen wir die Tangentengleichung auf und setzen den Punkt t_1 ein, verfolgen also graphisch die Tangente ein kurzes Stück. Nach unserer Rechnung vorhin gilt

$$y_1 = z(t_1) = z(a + h) = y_0 + hy'(a) = y_0 + hf(t_0, y_0).$$

Sei nun y_k bereits ausgerechnet. Zur Berechnung von y_{k+1} berechnen wir die Tangente an die y , falls sie wirklich durch den Punkt (t_k, y_k) geht, also:

$$z(t) = y_k + (t - t_k)f(t_k, y_k)$$

und setzen t_{k+1} ein. Wir erhalten

$$y_{k+1} = z(t_{k+1}) = y_k + (t_{k+1} - t_k)f(t_k, y_k) = y_k + hf(t_k, y_k).$$

Dies ist das Eulerverfahren. Wir erhalten als Ergebnis einen Vektor mit Zahlen y_0, \dots, y_N . Die Zahlen sind nach unserer Motivation Approximationen für die Funktion y an den Stellen t_0, \dots, t_N .

Dies ist natürlich kein Beweis, sondern nur eine Motivation. Im Kapitel über Differentialgleichungen werden wir zeigen, dass dieses Verfahren tatsächlich eine Approximation liefert und Abschätzungen für den Fehler angeben.

Alternative Herleitung: Angenommen, wir wissen, dass $y_k = y(t_k)$. Dann ist mit Taylorentwicklung

$$y(t_{k+1}) = y(t_k + h) = y_k + y'(t_k)h + R,$$

wobei wir die Taylorreihe nach dem zweiten Glied abgebrochen und durch ein Restglied R ersetzt haben. Unter vernünftigen Annahmen ist dieses Restglied klein für $h \mapsto 0$ und gut abschätzbar (Restgliedabschätzungen) mit Formeln der Analysis 1. Daher ist $y_k + y'(t_k)h = y_k + hf(t_k, y_k)$ eine gute Abschätzung für $y(t_{k+1})$, und es macht Sinn, zu definieren

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k).$$

1.3 Federbeispiel

Es sei $s(t)$ die Auslenkung einer Feder mit Federkonstante c , an die ein Gewicht der Masse m gehängt wird. Dann erfüllt s mit der Gravitationskonstanten g die Differentialgleichung

$$s''(t) = -g - \frac{c}{m}s(t).$$

Diese Gleichung berücksichtigt keine Dämpfung. Mit einer Dämpfungsfunktion d :

$$s''(t) = -g - \frac{c}{m}s(t) - \frac{d(s'(t))}{m}.$$

d kann linear, aber auch nichtlinear sein.

Für das 3–Feder–Beispiel von Bollhöfer und Mehrmann erhalten wir ein System aus drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, also nach Umstellung auf die Normalform ein System aus sechs Differentialgleichungen erster Ordnung.

Wir nehmen jeweils an, dass wir die Situation zum Anfangszeitpunkt komplett kennen (Positionen und Geschwindigkeit). Dies sind Beispiele für Systeme von Anfangswertaufgaben.

1.4 Stationäre Wärmeleitungsgleichung

Es sei $U(t, x)$ die Wärmeverteilung in einem Draht, der an den Enden a und b auf 0 Grad gekühlt und in der Mitte zeitkonstant erwärmt wird mit der Hitzzufuhr $s(x)$. Dann stellt sich nach einiger Zeit eine zeitkonstante Wärmeverteilung $u(x)$ ein.

u erfüllt das Randwertproblem $-u''(x) = s(x)$, $u(a) = u(b) = 0$.

Numerische Lösungsidee: Wie bei den Anfangswertaufgaben fügen wir wieder äquidistante Zwischenpunkte x_1, \dots, x_{N-1} zwischen a und b ein. Die Punkte haben den

Abstand $h = (b - a)/N$. Es gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u(x + \epsilon) - 2u(x) + u(x - \epsilon)}{\epsilon^2} = u''(x).$$

Ansatz über l'Hospital:

$$\frac{u(x + \epsilon) - 2u(x) + u(x - \epsilon)}{\epsilon^2} \mapsto \frac{u'(x + \epsilon) - u'(x - \epsilon)}{2\epsilon} \mapsto u''(x).$$

Alternativ über Taylorentwicklung.

Für kleine h gilt also

$$\frac{-u(x + h) + 2u(x) - u(x - h)}{h^2} \sim -u''(x) = s(x).$$

Wir wollen nun Näherungen u_k für $u(x_k)$ berechnen. Dazu fordern wir, dass diese Gleichung exakt erfüllt ist für die Näherungen. Wegen $x_k + h = x_{k+1}$ und $x_k - h = x_{k-1}$ erhalten wir damit für $k = 1 \dots N - 1$ die Gleichungen

$$s(x_k) = \frac{-u_{k+1} + 2u_k - u_{k-1}}{h^2}.$$

Wir multiplizieren jetzt noch diese Gleichung mit h^2 und erhalten

$$-u_{k+1} + 2u_k - u_{k-1} = h^2 s(x_k), \quad k = 1 \dots N - 1.$$

Da die Temperatur an den Rändern Null ist, können wir setzen $u_0 = u_N = 0$. Wir erhalten also ein lineares Gleichungssystem in den Variablen u_1, \dots, u_{N-1} .

Dieses Gleichungssystem wird beschrieben über die Matrixgleichung $Au = b$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zu zeigen ist jetzt natürlich, dass diese Matrix invertierbar ist usw. Diese Matrix, die das Anwendungsproblem der Verteilung der Wärme in einem Draht repräsentiert, wird uns als Beispiel bei der Lösung linearer Gleichungssysteme dienen.

1.5 Google–Matrix

Google bestimmt mit Hilfe dieser Matrix die Wichtigkeit von Webseiten. Die Größe ist $(\text{Anzahl der Webseiten}) \times (\text{Anzahl der Webseiten})$. Die Matrix enthält nur nichtnegative Einträge, die Spaltensumme ist 1 für jede Spalte (stochastische Matrix). Bei der eigentlichen Google–Matrix sind die Hauptdiagonalelemente 0, bei der modifizierten $d > 0$, etwa $d \sim 0.6$.

Die Matrix hat den betragsmaximalen Eigenwert 1, die Vielfachheit des Eigenwerts im charakteristischen Polynom der Matrix ist ebenfalls 1. Zur Lösung des Problems muss ein Eigenvektor zu diesem Eigenwert 1 ausgerechnet werden.

Diese Matrix wird uns als Beispiel für Eigenwertprobleme dienen.

Kapitel 2

Referenz zur linearen Algebra

Wir stellen hier einmal die Grundbegriffe der linearen Algebra als Referenz kompakt zusammen, so wie wir sie nutzen werden. Wir beschränken uns grundsätzlich auf die Betrachtung von Vektorräumen über $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$, häufig der Einfachheit halber nur auf \mathbb{R} . Seien also im Folgenden immer U und V Vektorräume über K .

Hier werden keine Beweise oder ähnliches gegeben, sie sollten alles in Ihrem Lineare Algebra–Skript finden (oder zum Beispiel in dem von Siegfried Echterhoff unter <https://ivv5hpp.uni-muenster.de/u/echters/Lineare-Algebra/Skript/>).

2.1 Normierte Vektorräume

Grundlegend für alle numerischen Überlegungen ist der Begriff der Norm, denn nur so lassen sich Fehler messen.

Definition 2.1 (*normierte Vektorräume*)

Sei V ein Vektorraum. $\|\cdot\| : V \mapsto \mathbb{R}^{\geq 0}$ heißt Norm, falls

1) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \forall \alpha \in K, x \in V$.

2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in V$.

$(V, \|\cdot\|)$ heißt normierter Vektorraum.

Beispiel 2.2 Sei $V = \mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty]$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in V$.

$$\|v\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p} \quad (p < \infty), \quad \|v\|_\infty = \max_i |v_i|$$

heißt p -Norm (und ist eine Norm).

Beispiel 2.3 Sei $V = C^0(I)$ der Raum der stetigen Funktionen auf einer kompakten Teilmenge $I \subset \mathbb{R}^n$, $f \in V$.

$$\|f\|_p = \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (p < \infty), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

heißt p -Norm (und ist eine Norm).

Definition 2.4 (Banachraum) Sei $(V, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum. V heißt vollständig oder Banachraum, falls jede Cauchyfolge in V einen Grenzwert in V besitzt (bzgl. $\|\cdot\|$).

Beispiel 2.5

$(C^0(I), \|\cdot\|_2)$ ist nicht vollständig.

$(C^0(I), \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig.

Definition 2.6 (Vektorräume mit Skalarprodukt, euklidische Vektorräume)

$(\cdot, \cdot) : V \times V \mapsto K$ heißt Skalarprodukt, falls

- 1) $(v, v) \geq 0$ und $(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0 \forall v \in V$.
- 2) $(u, v) = \overline{(v, u)} \forall u, v \in V$.
- 3) (\cdot, v) ist linear für alle festen $v \in V$.

Üblicherweise wird auf euklidischen Räumen die induzierte Norm

$$\|v\| = (v, v)^{1/2}, \quad v \in V$$

benutzt. V heißt dann Prä-Hilbertraum. Ist V mit dieser Norm vollständig, so heißt V Hilbertraum.

Beispiel 2.7

1) Sei $V = \mathbb{C}^n$. Dann ist

$$(u, v) = u^t \bar{v}, \quad u, v \in V$$

ein Skalarprodukt.

2) Sei $V = C^0(I)$. Dann ist

$$(f, g) = \int_I f(x)\overline{g(x)}dx, f, g \in V$$

ein Skalarprodukt.

Wir werden beide stillschweigend als Standard-Skalarprodukte auf den jeweiligen Räumen verwenden. Die induzierte Norm ist jeweils $\|\cdot\|_2$.

Satz 2.8 (Cauchy-Schwarz)

Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann gilt

$$|(u, v)|^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2 \quad \forall u, v \in V$$

und Gleichheit genau dann, wenn u und v linear abhängig sind.

Die wichtigste Folgerung ist

Satz 2.9 Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann ist

$$\|v\| = (v, v)^{1/2}, v \in V$$

eine Norm.

Satz 2.10 Sei V endlichdimensional und seien $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ zwei Normen auf V . Dann sind $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ äquivalent, d.h. $\exists C_1, C_2 > 0$:

$$C_1|||v||| \leq \|v\| \leq C_2|||v||| \quad \forall v \in V.$$

Eine wichtige Folgerung dieses Satzes ist: Wenn eine Folge in endlichdimensionalen Räumen konvergiert bezüglich einer Norm, so konvergiert sie gegen den gleichen Grenzwert bezüglich aller Normen.

2.2 Lineare Operatoren

Wir werden in dieser Vorlesung im wesentlichen Matrizen als Spezialfall linearer Operatoren untersuchen. Im folgenden steht T immer für eine allgemeine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen, A für eine Abbildung zwischen endlichdimensionalen Räumen (die wir immer sofort mit einer Matrix identifizieren).

Definition 2.11 (lineare Operatoren) Seien U, V Vektorräume. $T : U \mapsto V$ heißt linear genau dann, wenn

$$T(\alpha x + y) = \alpha Tx + Ty, \quad \forall \alpha \in K, x, y \in U.$$

Sind U und V endlichdimensional, so kann T durch eine Matrix A bezüglich vorgegebener Basen dargestellt werden. Falls $U = V$ und T in zwei verschiedenen Basen durch die Matrizen A und B dargestellt wird, so heißen A und B ähnlich, und es gibt eine Matrix X mit

$$A = XBX^{-1}.$$

Die Menge aller linearen Operatoren $L(U, V)$ bildet auf natürliche Weise selbst wieder einen Vektorraum.

Definition 2.12 (Adjungierte Abbildung)

Seien $(U, (\cdot, \cdot)_U)$ und $(V, (\cdot, \cdot)_V)$ Vektorräume mit Skalarprodukt. Sei $T \in L(U, V)$, $T^* \in L(V, U)$. Falls

$$(Tu, v)_V = (u, T^*v)_U \quad \forall u \in U, v \in V,$$

so heißt T^* die zu T adjungierte Abbildung.

Falls $U = V$ und $T = T^*$, so heißt T selbstadjungiert.

Es gilt: Jede stetige Abbildung besitzt eine Adjungierte (ohne Beweis).

Beispiel 2.13 Sei $U = \mathbb{C}^n$, $V = \mathbb{C}^m$, $A \in L(U, V)$ (also A $(n \times m)$ -Matrix, wobei wir immer unzulässigerweise die Matrizen mit den Abbildungen identifizieren, die sie darstellen). U und V seien versehen mit dem Standardskalarprodukt. Dann gilt für $u \in U$, $v \in V$

$$(Au, v) = u^t A^t \bar{v} = u^t \overline{A^t v} = (u, \overline{A^t v})$$

und damit $A^* = \overline{A^t}$, über \mathbb{R} natürlich $A^* = A^t$. Matrizen mit der Eigenschaft

$$A = A^* = \overline{A^t}$$

heißen hermitesch, reelle Matrizen mit der Eigenschaft

$$A = A^* = A^t$$

heißen symmetrisch.

Satz 2.14 (Rechenregeln für adjungierte Operatoren)

1. $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$.
2. $(T^*)^* = T$.
3. TT^* und T^*T sind selbstadjungiert.

Definition 2.15 (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Sei $T \in L(U, U)$. $v \in U$, $v \neq 0$. v heißt Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, falls $Tv = \lambda v$.

Definition 2.16 (Diagonalisierbarkeit)

Sei $T \in L(U, U)$, $\dim U < \infty$. T heißt diagonalisierbar, falls U eine Basis aus Eigenvektoren v_k von T besitzt. Es gilt

$$D = W^{-1}TW, W = (v_1 v_2 \cdots v_n), T = \text{diag}(\lambda_k).$$

Satz 2.17 Selbstadjungierte Operatoren haben reelle Eigenwerte. Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.

Definition 2.18 (Positiv definite Operatoren)

Sei U Vektorraum mit Skalarprodukt, $T \in L(U, U)$. T heißt (symmetrisch) positiv definit, wenn T selbstadjungiert ist und

$$(Tu, u) > 0 \forall u \in U, u \neq 0.$$

Gilt nur \geq , so heißt T positiv semidefinit.

Satz 2.19 Sei U Vektorraum mit Skalarprodukt, $T \in L(U, U)$ symmetrisch positiv definit. Dann ist

$$(u, v)_T := (Tu, v), u \in U, v \in U$$

ein Skalarprodukt auf U .

Satz 2.20 Sei $T \in L(U, V)$. T^*T ist positiv semidefinit. Falls T injektiv ist, so ist T positiv definit.

Beweis: T^*T ist selbstadjungiert, und $(T^*Tx, x) = (Tx, Tx) \geq 0$. □

Den Satz über die Jordan–Normalform kennen Sie aus der Linearen Algebra I. Bitte machen Sie sich klar, dass Ihre Formulierung der folgenden entspricht.

Satz 2.21 (Jordan–Normalform)

Sei A eine $(n \times n)$ –Matrix. v heißt Hauptvektor k . Stufe zum Eigenwert λ von A , falls

$$(A - \lambda I)^k v = 0, (A - \lambda I)^{k-1} v \neq 0.$$

Hauptvektoren erster Stufe sind Eigenvektoren.

1. Jede Matrix besitzt eine Basis aus Hauptvektoren v_j .
2. Sei J die Darstellung von A in dieser Basis, also

$$J = B^{-1}AB, B = (v_1 v_2 \cdots v_n).$$

Dann ist J (fast) eine Diagonalmatrix, möglicherweise mit einigen Einsen oberhalb der Hauptdiagonalen, auf der die Eigenwerte von A stehen.

Satz 2.22 Sei A hermitesche $(n \times n)$ -Matrix. Dann ist A diagonalisierbar. U besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A .

Korollar 2.23 Die Matrix A sei hermitesch. A ist positiv definit (semidefinit) genau dann, wenn alle Eigenwerte von A positiv (nichtnegativ) sind.

Satz 2.24 Eine hermitesche Matrix ist genau dann positiv definit (semidefinit), wenn alle ihre Hauptminoren positiv (nichtnegativ) sind.

Kapitel 3

Fehler beim numerischen Rechnen

Fehler können beim numerischen Rechnen an mindestens vier Stellen entstehen:

1. Der **Modellierungsfehler** entsteht dadurch, dass wir ein (womöglich vereinfachtes) mathematisches Modell zugrunde legen, das nicht die gesamte Anwendung umsetzt. Beispiel: Im CT-Beispiel haben wir keine Streuung berücksichtigt.
2. Der **Diskretisierungsfehler** entsteht dadurch, dass wir nicht die exakte mathematische Formel implementieren. Beispiel: Approximation des Differentialquotienten durch einen Differenzenquotienten.
3. Der **Messfehler** bewirkt, dass unsere Eingangsdaten nur eine endliche Genauigkeit haben.
4. Der **Rechenfehler** entsteht durch Rundung bei der Durchführung der Rechnung.

Wir werden uns mit den Punkten drei und vier beschäftigen. Der Messfehler dominiert dabei üblicherweise den Rechenfehler.

3.1 Fehlerdefinitionen

Definition 3.1 (*absoluter und relativer Fehler*)

Sei $x \in V$, $(V, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum, \tilde{x} eine Näherung für x . Dann heißt

$$\|dx\|, dx = x - \tilde{x}$$

absoluter Fehler von \tilde{x} . Falls $x \neq 0$, so heißt

$$\epsilon := \frac{\|dx\|}{\|x\|}$$

relativer Fehler von \tilde{x} .

Bemerkung: Es sei

$$\tilde{\epsilon} := \frac{\|dx\|}{\|\tilde{x}\|}.$$

Dann gilt sofort

$$\tilde{\epsilon}(1 - \epsilon) \leq \epsilon \leq \tilde{\epsilon}(1 + \epsilon)$$

Für kleines ϵ gilt also $\epsilon \sim \tilde{\epsilon}$.

Für $x = 0$ wird kein relativer Fehler definiert.

Natürlich hängen alle diese Definitionen von der verwendeten Norm ab. Im Allgemeinen gibt die Anwendung eine Norm vor. Wir werden immer den relativen Fehler betrachten.

3.2 Fehlerverstärkung

Auszuwerten sei die stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ an der Stelle $x \in \mathbb{R}$, zu berechnen ist also $f(x)$. Statt x sei nur eine Näherung $\tilde{x} = x + dx$ bekannt, wir können also nur $f(x + dx)$ berechnen.

\tilde{x} hat also einen relativen Fehler von $\epsilon = \frac{|dx|}{|x|}$. Wie groß ist der dadurch verursachte erwartete relative Fehler

$$\frac{|f(x + dx) - f(x)|}{|f(x)|} ?$$

Mit dem Mittelwertsatz gilt sofort

$$\exists \xi \in [x - |dx|, x + |dx|] : \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = f'(\xi)$$

und damit

$$\frac{|f(x+dx) - f(x)|}{|f(x)|} = \frac{|f'(\xi)| |dx| |x|}{|f(x)| |x|} = \frac{|f'(\xi)| |x| |dx|}{|f(x)| |x|} \leq \widetilde{M} \epsilon,$$

$$\widetilde{M} := \sup_{y \in [x-|dx|, x+|dx|]} |f'(y)| \left| \frac{x}{f(x)} \right|$$

Der Eingangsfehler ϵ wird also durch den Faktor \widetilde{M} verstärkt.

Wir betrachten sehr kleine Fehler ϵ . Im Limes für $\epsilon \mapsto 0$ gilt $|f'(y)| \rightarrow |f'(x)|$. Wir schätzen daher die Fehlerverstärkung ab mit dem Faktor

$$M := \frac{|x| |f'(x)|}{|f(x)|}.$$

Diese Rechnung kann man genau so auch für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ausführen. Sei hierzu gegeben ein $x + dx$ eine Näherung für $x \in \mathbb{R}^n$, und sei $\epsilon_i := \frac{|dx_i|}{|x_i|}$ der relative Fehler der i . Komponente.

Satz 3.2

Sei $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Weiter seien $x, dx \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\frac{|f(x+dx) - f(x)|}{|f(x)|} \leq \sum_{k=1}^n \widetilde{M}_i \epsilon_i,$$

$$\widetilde{M}_i := \sup_{y \in [x-|dx|, x+|dx|]} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \right| \left| \frac{x_i}{f(x)} \right|.$$

Weiter gilt

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \widetilde{M}_i = \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \left| \frac{x_i}{f(x)} \right| =: M_i.$$

Die M_i heißen Verstärkungsfaktoren.

Liegen die M_i in der Größenordnung von 1, so liegt der maximale Fehler in der Größenordnung der Eingangsfehler. Gilt $M_i \gg 1$, so ist der maximale Fehler viel größer als die Eingangsfehler. Dieses Verhalten nennen wir gut bzw. schlecht gestellt.

Definition 3.3 Ein Problem heißt gut gestellt, falls kleine Eingangsfehler zu kleinen Fehlern im Ergebnis führen. Ein Problem heißt schlecht gestellt, falls kleine Eingangsfehler zu großen Fehlern im Ergebnis führen können.

Wir schauen nun als Beispiel auf die Grundrechenarten.

Beispiel 3.4 1. Multiplikation:

$$f(x, y) := xy$$

Es gilt

$$M_x = |y| \left| \frac{x}{xy} \right| = 1, M_y = 1.$$

Die Multiplikation ist immer gut gestellt.

2. Addition:

$$f(x, y) := x + y$$

Es gilt

$$M_x = 1 \left| \frac{x}{x+y} \right| = \left| \frac{x}{x+y} \right|, M_y = \left| \frac{y}{x+y} \right|.$$

Mit $M_x := \left| \frac{1}{1+y/x} \right|$ wird M_x sehr groß, falls $x \sim -y$. Die Addition ist also ein schlecht gestelltes Problem, falls x und y in der gleichen Größenordnung liegen und unterschiedliches Vorzeichen haben. Diese Situation nennen wir **Auslöschung**.

Beispiel 3.5 zur Auslöschung: Es sei $x = 1.01$, $y = -1$ und $\tilde{x} = 1$, $\tilde{y} = -1$. Dann hat \tilde{x} einen Fehler von ca. $0.01=1\%$. Es gilt

$$f(x, y) = x + y = 0.01, f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x} + \tilde{y} = 0$$

und damit für den relativen Fehler des Ergebnisses

$$\epsilon = \frac{|f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(x, y)|}{|f(x, y)|} = 1 = 100\%$$

Der Fehler hat sich also erheblich erhöht. Der Verstärkungsfaktor ist

$$M_x = \frac{1.01}{0.01} = 101$$

und das erklärt das schlechte Ergebnis.

Bemerkung: Der verstärkte Anfangsfehler ist ein **unvermeidlicher Fehler**. Dieser Fehler entsteht nicht durch einen Algorithmus oder durch falsches Rechnen auf dem Computer, auch bei exakter Rechnung macht man diesen Fehler.

3.3 Maschinendarstellung reeller Zahlen

Ein Rechner kann nicht jede Zahl exakt darstellen, sondern wird nur eine endliche Anzahl von Stellen bereitstellen. Naheliegender wäre es vielleicht, eine Zahl auf dem Rechner in einer Basis b (auf dem Rechner $b = 2$, hier der Einfachheit halber $b = 10$) darzustellen als

$$m_p m_{p-1} \dots m_1 m_{-1} m_{-2} \dots m_{-r}.$$

Zahlen mit mehr als $n + 1$ Stellen ließen sich dann sofort nicht mehr darstellen. Aus diesem Grund multipliziert man zunächst die Größenordnung heraus und repräsentiert die Zahlen in der normalisierten Darstellung

$$\pm 0.m_1 m_2 \dots m_p b^e$$

mit $m_1 \neq 0$ (die Null passt dabei nicht und erhält eine Sonderdarstellung). Einige Beispiele für normalisierte Darstellung im Zehnersystem:

$$\begin{aligned} 10 &= 0.1 \cdot 10^2 \\ 0.23 &= 0.23 \cdot 10^0 \\ 0.0000001 &= 0.1 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Definition 3.6 (Gleitkommazahlendarstellung nach IEEE 754, 1985)

Seien $b \geq 2$ (Basis), $p \geq 1$ (Mantissenlänge) für ein Format fest gewählte ganze Zahlen. Dann ist die Menge M der **Maschinenzahlen** definiert durch

$$M := \left\{ \pm \left(\sum_{k=1}^p m_k b^{-k} \right) b^e, m_k, e \in \mathbb{Z}, 0 \leq m_k \leq b-1, m_1 \neq 0 \right\} \cup \{0\}.$$

Auf Computern gebräuchlich sind die Werte $b = 2$ und $p = 23$ (single precision float) und $p = 52$ (double precision float).

Bemerkung: Eigentlich hat man noch eine Bedingung an e , aber die sei so großzügig gewählt, dass sie für uns nicht ins Gewicht fällt.

Will man nun eine Zahl auf den Rechner bringen, ist das im Allgemeinen nicht exakt möglich, sie muss auf die nächstgelegene darstellbare Zahl gerundet werden. Die dazu verwendete Funktion nennen wir Rundungsfunktion.

Definition 3.7 Eine Rundungsfunktion zu einer Menge von Maschinenzahlen M ist eine Funktion $rd : \mathbb{R} \mapsto M$ mit der Eigenschaft

$$|rd(x) - x| \leq \min_{y \in M} |y - x|.$$

Diese Funktion ist nicht eindeutig definiert. Im Zehnersystem kann man etwa die 5 nach oben oder unten runden, beide Möglichkeiten sind in den Standards zugelassen und während der Rechnung wählbar.

Für uns ist natürlich entscheidend: Wie groß ist der maximale relative Fehler, wenn wir eine Zahl auf den Rechner bringen? Dazu betrachten wir ein kurzes Beispiel mit $b = 10$ und $p = 2$ mit einer zugehörigen Rundungsfunktion rd .

Die unbekannte Zahl x sei zu $m = 0.44 \cdot 10^e$ gerundet worden. Dann muss x zwischen $0.435 \cdot 10^e$ und $0.445 \cdot 10^e$ liegen. Der maximale Fehler ist also

$$0.005 \cdot 10^e = 10^{-3} \frac{10}{2} 10^e = b^{-p-1} \frac{b}{2} b^e.$$

Diese Rechnung gilt für alle Zahlen. Nach Definition der Maschinenzahlen ist $m_1 \neq 0$, d.h. für alle Zahlen ist $m \geq b^{-1}b^e$. Also gilt für den relativen Rundungsfehler

$$\left| \frac{rd(x) - x}{rd(x)} \right| \leq \text{eps}, \text{eps} = \frac{b^{-p+1}}{2}.$$

Satz 3.8 (Abschätzung des Rundungsfehlers)

$$\left| \frac{rd(x) - x}{rd(x)} \right| \leq \text{eps}$$

und

$$\left| \frac{rd(x) - x}{x} \right| \leq \text{eps}.$$

Beweis: Teil 1 mit der obigen Rechnung, Teil 2 mit derselben Idee. □

Es ist $\text{eps} \sim 10^{-7}$ für einfach und $\text{eps} \sim 10^{-16}$ für doppelt genaue Zahlen.

Wenn wir eine reelle Zahl auf den Rechner bringen, entsteht also ein zusätzlicher Fehler. Weiter sind die Maschinenzahlen nicht abgeschlossen. Es gilt etwa für $x = 0.11 \in M$ in dem obigen Format:

$$x \cdot x = 0.121 \notin M,$$

d.h. das Ergebnis muss wieder gerundet werden, mit zusätzlichem Fehler. Dieser Fehler ist sehr klein, viel kleiner als der Messfehler. Trotzdem kann er wichtig sein, nämlich dann, wenn in einer Rechnung eine künstliche Auslöschung auftritt.

3.4 Stabilität

Wir betrachten als Beispiel die Funktion $f(x, y) = x + y$, die wir ausrechnen mit dem Rechenweg $f(x, y) = (x + Z) + (y - Z)$ für eine große Zahl Z . Es seien die Vorzeichen von x und y gleich, d.h. wir wissen bereits, die Aufgabe ist gut konditioniert, der unvermeidbare Fehler ist in der Größenordnung der Eingangsfehler.

Wir setzen nun $x = y = 1$ und $Z = 1000$ und bringen diese Zahlen auf den Rechner von oben, also $p = 2$ und $b = 10$. Dann ist $eps = 0.05$. Es ist $x + Z = 1001$, dieses Ergebnis wird gerundet zu $0.1 \cdot 10^4$. $y - Z = -999$ wird gerundet zu $-0.1 \cdot 10^4$. Auf dem Rechner ist dann das Gesamtergebnis $1000 - 1000 = 0$, der Fehler beträgt also 100%, und das ist viel größer als der Eingangsfehler.

Definition 3.9 *Algorithmen, die einen Fehler liefern, der in der Größenordnung des unvermeidlichen Fehlers liegt, heißen stabil. Ansonsten heißen sie instabil.*

Es sieht vielleicht so aus, als sei das ja auch unsinnig, so etwas zu tun (eine Zahl erst addieren und dann subtrahieren). Manchmal tut man das aber implizit, und tatsächlich ist das bei der pq -Formel zur Lösung quadratischer Gleichungssysteme der Fall. Wir betrachten

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Hier gibt es zwei gefährliche Stellen (Auslöschung): Die Subtraktion unter der Wurzel und die äußere Addition der Wurzel. Wir betrachten den zweiten Fall. Falls $|q| \ll p$, so ist der Wert der Wurzel in der Größenordnung von $\frac{p}{2}$. Daher haben daher die beiden addierten Zahlen unterschiedliches Vorzeichen und liegen in derselben Größenordnung, wir erwarten Auslöschung. Im Jupyter Notebook wird gezeigt, dass dies tatsächlich der Fall ist, und dass der auftretende Fehler viel größer ist als der unvermeidliche Fehler. Dies lässt sich korrigieren durch Anwendung des Satzes von Vieta.

Korollar 3.10 *Die pq -Formel zur Berechnung der Lösung quadratischer Gleichungssysteme ist instabil.*

3.5 Induzierte Matrixnorm

Im Folgenden wollen wir den unvermeidlichen Fehler für Systeme linearer Gleichungen der Form $Ax = b$ untersuchen. Dazu wollen wir zulassen, dass A und b fehlerhaft sind, d.h. statt A, b stehen nur Näherungen $\tilde{A} = A + dA, \tilde{b} = b + db$ zur Verfügung. Wir lösen also das fehlerbehaftete Gleichungssystem $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$.

Um den Fehler dA zu messen, benötigen wir sinnvolle Matrixnormen. Die wollen wir zunächst definieren und untersuchen.

Naheliegender wäre es, die Norm einer Matrix einfach auf den einzelnen Koeffizienten zu definieren, wie bei den Vektoren auch, also

$$\|A\|_p = \left(\sum_{k,j} |A_{k,j}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ bzw. } \|A\|_\infty = \max_{k,j} |A_{k,j}|$$

für $p < \infty$. Für $p = 2$ heißt diese Norm z.B. Frobenius-Norm.

Der Vorteil dieser Normen ist, dass sie schnell auszurechnen sind. Der Nachteil ist, dass sie nicht notwendig verträglich sind mit der Vektorraumnorm (d.h. es gilt nicht $\|Av\| \leq \|A\| \|v\|$). Für die Zwecke dieser Vorlesung sind sie damit im Allgemeinen unbrauchbar.

Zur Motivation: Sei in unserem Problem $dA = 0$, also $A = \tilde{A}$. Dann gilt $\tilde{x} = A^{-1}\tilde{b}$. Der relative Fehler von \tilde{x} gegen die wahre Lösung x ist dann

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{-1}(b + db) - A^{-1}b\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{-1}db\|}{\|x\|}.$$

Wir wollen nun den Zähler abschätzen. Für die Matrizen haben wir noch keine Norm festgelegt. Naheliegender wäre eine Definition für $\|A^{-1}\|$, so dass gilt

$$\|A^{-1}db\| \leq \|A^{-1}\| \|db\| \quad \forall db \in \mathbb{R}^n,$$

und natürlich sollte diese Grenze möglichst klein sein. Teilen durch $\|db\|$ legt nahe

$$\|A^{-1}\| := \sup_{db \neq 0} \frac{\|A^{-1}db\|}{\|db\|}.$$

Wir definieren daher

Definition 3.11 (induzierte Matrixnorm)

Sei A in $\mathbb{R}^{n \times m}$, und seien $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$ und $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ Normen im \mathbb{R}^m bzw. \mathbb{R}^n . Dann heißt

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^m, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\mathbb{R}^n}}{\|x\|_{\mathbb{R}^m}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^m, x \neq 0} \left\| A \frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^m}} \right\|_{\mathbb{R}^n} = \sup_{x \in \mathbb{R}^m, \|x\|=1} \|Ax\|$$

(induzierte, verträgliche) Matrixnorm von A .

Die erste Frage ist natürlich: Ist das wohldefiniert, d.h. ist das $\sup < \infty$, und ist dies eine Norm?

Satz 3.12 Die Matrixnorm ist wohldefiniert und ist eine Norm.

Beweis: Mit den Bezeichnungen aus 3.11: Wir werden gleich zeigen, dass in der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ gilt

$$\forall A \exists M \in \mathbb{R} : \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq M \forall x \in \mathbb{R}^m, x \neq 0.$$

Wegen der Normäquivalenz 2.10 gibt es Zahlen c_1 und c_2 mit

$$\|Ax\|_{\mathbb{R}^n} \leq c_1 \|Ax\|_\infty, \|x\|_{\mathbb{R}^n} \geq c_2 \|x\|_\infty$$

und damit

$$\frac{\|Ax\|_{\mathbb{R}^n}}{\|x\|_{\mathbb{R}^m}} \leq \frac{c_1}{c_2} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{c_1}{c_2} M \forall x \in \mathbb{R}^m, x \neq 0.$$

Also ist der Quotient nach oben durch eine Zahl beschränkt und das Supremum ist endlich. Die Normeigenschaften zeigt man durch einfaches Nachrechnen. \square

Im Folgenden werden wir die Indizes an den Normen weglassen.

Satz 3.13 (Eigenschaften der induzierten Norm)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|.$$

Sei $B \in \mathbb{R}^{m \times r}$. Dann gilt

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Beweis:

$$\|Ax\| = \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| \|x\| \leq \|A\| \|x\| \quad (x \neq 0).$$

$$\|AB\| = \sup_{\|x\|=1} \|ABx\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|A\| \|Bx\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|A\| \|B\| \|x\| = \|A\| \|B\|.$$

\square

Korollar 3.14 Lineare Abbildungen auf endlichdimensionalen Vektorräumen sind stetig.

Beweis: Sei alles wie in 3.11. Sei x_k eine Folge in \mathbb{R}^m , die gegen x konvergiert. Dann gilt

$$\|Ax_k - Ax\| \leq \|A\| \|x_k - x\| \mapsto 0,$$

also konvergiert Ax_k gegen Ax und die Abbildung $x \mapsto Ax$ ist stetig. \square

In endlichdimensionalen Banachräumen wird das Infimum angenommen (die Einheitskugel ist kompakt). Um zu zeigen, dass $\|\cdot\|$ eine induzierte Matrixnorm ist, ist also zu zeigen:

1. $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \forall x \in \mathbb{R}^m$

2. $\exists \bar{x} \in \mathbb{R}^m : \|A\bar{x}\| = \|A\| \|\bar{x}\|.$

Wir berechnen die Matrixnorm an zwei Beispielen, $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_2$.

Beispiel 3.15 Sei $A = (A_{k,j}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ nicht die Nullmatrix. Wir bestimmen $\|A\|_\infty$. Sei dazu $x = (x_k) \in \mathbb{R}^m$ beliebig. Nach Definition der Supremumsnorm gilt

$$|x_j| \leq \|x\|_\infty \forall j.$$

Dann gilt:

$$\|Ax\|_\infty = \left\| \sum_j A_{k,j} x_j \right\|_\infty = \max_k \left| \sum_j A_{k,j} x_j \right| \leq \max_k \sum_j |A_{k,j} x_j| \leq \max_k \sum_j |A_{k,j}| \|x\|_\infty$$

und damit $\|A\| \leq \max_k \sum |A_{k,j}|.$

Zu zeigen ist noch, dass diese Grenze angenommen wird. Sei \tilde{k} der Index, an dem das Zeilenmaximum angenommen wird, also

$$\max_k \sum_j |A_{k,j}| = \sum_j |A_{\tilde{k},j}|.$$

Sei $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\bar{x}_j = \text{sgn}(A_{\tilde{k},j})$ mit der Definition

$$\text{sgn} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \text{sgn}(y) = \begin{cases} 1 & y > 0 \\ 0 & y = 0 \\ -1 & y < 0 \end{cases}$$

Mit dieser Definition gilt $\forall y \in \mathbb{R} : y \text{sgn}(y) = |y|$, also für unser \bar{x} mit $\|\bar{x}\| = 1$:

$$\|A\bar{x}\|_\infty \geq (A\bar{x})_{\tilde{k}} = \sum_j A_{\tilde{k},j} \bar{x}_j = \sum_j |A_{\tilde{k},j}| = \max_k \sum_j |A_{k,j}|.$$

und damit

$$\|A\|_\infty = \max_k \sum_j |A_{k,j}|.$$

Wichtiger als die ∞ -Norm ist die 2-Norm. Wir erinnern zunächst an einige Definitionen und Sätze der Linearen Algebra.

Seien $x, y \in \mathbb{C}^m$. Dann sind das euklidische Standardskalarprodukt und die euklidische Norm definiert durch

$$(x, y) = x^t \bar{y}, \quad \|x\|_2^2 = (x, x).$$

Wir werden häufig die Adjungierte einer Matrix benutzen, definiert durch

$$A^* := \overline{A^t} \quad (2.12).$$

Dann ist A^*A positiv semidefinit, und der \mathbb{R}^m besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren v_k von A^*A zu Eigenwerten $\lambda_k \geq 0$. Eigenwerte seien immer dem Betrag nach geordnet, d.h.

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m|.$$

Seien $x, y \in \mathbb{C}^m$. Da die v_k eine Basis bilden, lassen sich x und y in dieser Basis darstellen:

$$\begin{aligned} x &= \sum_k \alpha_k v_k \\ y &= \sum_j \beta_j v_j \end{aligned}$$

Dann gilt

$$(x, y) = \left(\sum_k \alpha_k v_k, \sum_j \beta_j v_j \right) = \sum_{k,j} \alpha_k \bar{\beta}_j (v_k, v_j) = \sum_k \alpha_k \bar{\beta}_k$$

denn $(v_k, v_j) = \delta_{k,j}$ mit dem Kronecker- δ .

Insbesondere gilt daher

$$\|x\|^2 = (x, x) = \sum_k |\alpha_k|^2$$

und

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = \sum_k \lambda_k |\alpha_k|^2.$$

Definition 3.16 Sei $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Dann heißt

$$\rho(B) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ Eigenwert von } B\}$$

Spektralradius von B .

Mit unseren Definitionen von oben gilt also

$$\rho(A^*A) = |\lambda_1| = \lambda_1.$$

Satz 3.17 Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Dann gilt

$$\|A\|_2 = \rho(A^*A)^{1/2}.$$

Beweis: Wir müssen nur noch einsetzen. Mit unseren Bezeichnungen von oben gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^m$

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_k \lambda_k |\alpha_k|^2 \leq \lambda_1 \sum_k |\alpha_k|^2 = \rho(A^*A) \|x\|_2^2.$$

Außerdem gilt

$$\|Av_1\|_2^2 = (A^*Av_1, v_1) = \lambda_1 (v_1, v_1) = \lambda_1 \|v_1\|_2^2.$$

Nach Ziehen der Wurzel gilt also für alle $x \in \mathbb{R}^m$

$$\|Ax\|_2 \leq \rho(A^*A)^{1/2} \|x\|_2$$

und Gleichheit für $x = v_1$, also ist $\rho(A^*A)^{1/2} = \|A\|_2$. □

3.6 Fehler bei linearen Gleichungssystemen

Mit diesem Hintergrund können wir nun die Fehlerverstärkung betrachten. Wie oben wollen wir lösen ein Gleichungssystem $Ax = b$, A invertierbar. Für A steht uns nur eine Näherung $\tilde{A} = A + dA$ zur Verfügung, für b eine Näherung $\tilde{b} = b + db$. Wir können also nur das Gleichungssystem

$$\tilde{b} = \tilde{A}\tilde{x} = (A + dA)(x + dx), \quad \tilde{x} = x + dx.$$

lösen. Wie groß ist der relative Fehler von \tilde{x} , also $\frac{\|dx\|}{\|x\|}$?

Zunächst wollen wir klären, unter welchen Voraussetzungen \tilde{A} überhaupt invertierbar ist. Dies ist natürlich nicht immer der Fall, wenn etwa gilt $A = I_2$ und wir uns vermessen im Element $(1, 1)$, so entsteht

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Matrix ist natürlich nicht invertierbar. Wir fragen daher zunächst: Wie stark darf man eine Einheitsmatrix verändern, damit sie invertierbar bleibt? Die Antwort gibt

Satz 3.18 (Neumannsche Reihe)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\|A\| < 1$ für (irgend-) eine induzierte Norm. Dann ist $(I - A)$ invertierbar, und

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Beweis: Dies ist natürlich nichts anderes als eine geometrische Reihe, nur dass man statt einer Zahl eine Matrix einsetzt. Der Beweis ist exakt der gleiche.

Wegen $\|A\| < 1$ bilden die Partialsummen von $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ eine Cauchyfolge, also konvergiert die Summe. Es gilt

$$(I - A) \sum_{k=0}^n A^k = I - A^{n+1} \mapsto I,$$

und damit

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}.$$

□

Bemerkung: Dieser Satz ist überraschend. Bewiesen wird etwas, das nicht von der Norm abhängt (Invertierbarkeit einer Matrix), aber die Bedingung hängt von der Norm ab. Die Bedingung ist also sicherlich nur hinreichend, nicht notwendig.

Korollar 3.19 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, $dA \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Weiter sei

$$q := \|A^{-1}\| \|dA\| < 1.$$

Dann ist $(A + dA)$ invertierbar und

$$\|(A + dA)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - q}.$$

Beweis:

$$(A + dA) = A(I - (-A^{-1}dA))$$

ist invertierbar nach 3.18.

$$\begin{aligned} \|(A + dA)^{-1}\| &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (-A^{-1}dA)^k A^{-1} \right\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \sum_{k=0}^{\infty} q^k \\ &= \|A^{-1}\| \frac{1}{1 - q} \end{aligned}$$

□

Dieser Satz lässt sich so interpretieren: Die Matrix A sei invertierbar. Bekannt ist eine Approximation \tilde{A} . Falls $\|A - \tilde{A}\|$ klein genug ist, so ist auch \tilde{A} invertierbar.

Korollar 3.20 Die Menge der invertierbaren $(n \times n)$ -Matrizen ist offen.

Als Anwendung berechnen wir jetzt den unvermeidbaren Fehler bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$Ax = b$$

mit einer invertierbaren $n \times n$ -Matrix A und $b \in \mathbb{R}^n$. Wir bestimmen also eine Abschätzung für den Fehler, der entsteht, wenn die Koeffizienten der invertierbaren Matrix A oder des Vektors b nicht genau bekannt sind, sondern statt dessen nur Näherungen $\tilde{A} = A + dA$ und $\tilde{b} = b + db$ zur Verfügung stehen und wir ersatzweise die Lösung des Gleichungssystems

$$(A + dA)\tilde{x} = b + db$$

berechnen.

Sei zunächst $n = 2$. Dann können wir die Lösung des Gleichungssystems als Schnittpunkt zweier Geraden im \mathbb{R}^2 graphisch bestimmen. Kleine Änderungen in den Koeffizienten führen zu kleinen Änderungen in der Lage der Linien. **Aber:** Falls die Linien fast parallel liegen, führt eine kleine Änderung in der Lage der Linien zu großen Änderungen beim Schnittpunkt. Die Verstärkung des Eingangsfehlers muss also von der Richtung der Linien, also von A , abhängen.

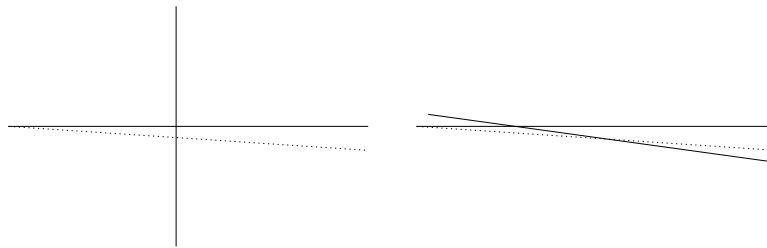


Abbildung 3.1: Graphische Lösung von Gleichungssystemen: Links gut gestellt, rechts schlecht gestellt. Kleine Änderungen der horizontalen Geraden (gestrichelte Linie) führen zu kleiner (links) oder großer (rechts) Änderung des Schnittpunkts mit der zweiten Geraden.

Satz 3.21 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $Ax = b$. Sei weiter $dA \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $db \in \mathbb{R}^n$. Es sei

$$k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

die **Kondition** von A und es gelte

$$q = k(A) \frac{\|dA\|}{\|A\|} < 1.$$

Dann ist $A + dA$ invertierbar. Sei $\tilde{x} = x + dx$ die Lösung von

$$(A + dA)\tilde{x} = (b + db).$$

Dann gilt für den relativen Fehler in der Lösung

$$\frac{\|dx\|}{\|x\|} \leq \frac{k(A)}{1 - q} \left(\underbrace{\frac{\|db\|}{\|b\|}}_{\text{rel. Fehler in } b} + \underbrace{\frac{\|dA\|}{\|A\|}}_{\text{rel. Fehler in } A} \right)$$

Die relativen Fehler in A und b werden also (höchstens) um den Faktor

$$M = k(A)/(1 - q)$$

verstärkt.

Für sinnvolle Anwendungen ist $\|dA\|$ klein gegen $\|A\|$, also $q \sim 0$ und damit $M \sim k(A)$.

Beweis: Nach 3.19 ist $A + dA$ invertierbar, und es gilt

$$\|(A + dA)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - q}.$$

Es gilt

$$(A + dA)(x + dx) = (b + db)$$

und damit wegen $Ax = b$

$$(A + dA)dx = db - dAx$$

und

$$dx = (A + dA)^{-1}(db - dAx),$$

also insbesondere

$$\|dx\| \leq \|(A + dA)^{-1}\|(\|db\| + \|dA\|\|x\|).$$

Für den relativen Fehler für $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\|dx\|}{\|x\|} &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - q} \left(\frac{\|db\|}{\|x\|} + \|dA\| \right) \\ &= \frac{k(A)}{1 - q} \left(\frac{\|db\|}{\|A\|\|x\|} + \frac{\|dA\|}{\|A\|} \right) \\ &\leq \frac{k(A)}{1 - q} \left(\frac{\|db\|}{\|b\|} + \frac{\|dA\|}{\|A\|} \right) \end{aligned}$$

wegen $\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.

□

Kapitel 4

Direkte Lösung linearer Gleichungssysteme

Fast jedes praktische Problem führt am Ende nach langer Modellierung auf ein lineares Gleichungssystem. Deshalb ist ihre Lösung von fundamentaler Bedeutung für die Angewandte Mathematik. Wir betrachten zunächst direkte Verfahren, die in endlicher Zeit eine Lösung liefern, gegenüber iterativen Verfahren, bei denen eine Folge ausgerechnet wird, die gegen die Lösung konvergiert. Direkte Verfahren sind dabei typischerweise langsam für große Matrizen und spielen heute eine untergeordnete Rolle.

Eine gute Quelle für klassische Algorithmen und Analysen zu diesem Bereich ist das Buch von Golub und van Loan, *Matrix Computations*.

4.1 Gauß–Elimination und LR –Zerlegung

Die **Gauß–Elimination** sollte bereits aus der Schule bekannt sein. Wir rechnen trotzdem zur Einführung ein Mikro–Beispiel.

| | | Zeilenoperation | |
|--|--------------------------|-----------------|------------------|
| 3 | $x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$ | | |
| 6 | $x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 12$ | $l_{21} = 2$ | $II - l_{21}I$ |
| -3 | $x_1 + x_2 - 2x_3 = -3$ | $l_{31} = -1$ | $III - l_{31}I$ |
| $\equiv \mathbf{A}^{(1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(1)}$ | | | |
| 3 | $x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$ | | |
| | $x_2 - 6x_3 = -4$ | | |
| | $3x_2 - x_3 = 5$ | $l_{32} = 3$ | $III - l_{32}II$ |
| $\equiv \mathbf{A}^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(2)}$ | | | |
| 3 | $x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$ | | |
| | $x_2 - 6x_3 = -4$ | | |
| | $17x_3 = 17$ | | |
| $\equiv \mathbf{A}^{(3)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(3)}$ | | | |

Durch **Rückwärtseinsetzen** ergibt sich damit

$$x_3 = 17/17 = 1, x_2 = (-4 + 6)/1 = 2, x_1 = (8 - 1 - 2 \cdot 2)/3 = 1.$$

Wir werden Algorithmen immer in einem Pseudocode formulieren.

Zu lösen sei $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$. Setze $A^{(1)} = A$ und $b^{(1)} = b$. Es sei $A^{(k)} = (a_{jl}^{(k)})$ usw.

Für $i = 1 \dots n - 1$

Zur Konstruktion des Gleichungssystems $A^{(i+1)}x = b^{(i+1)}$

Übernehme die ersten i Gleichungen, d.h. die ersten i Zeilen.

Für $j = i + 1 \dots n$

$$l_{ji} = \frac{a_{ji}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}} \text{ falls } a_{ii}^{(i)} \neq 0.$$

Für $k = i + 1 \dots n$

$$a_{jk}^{(i+1)} = a_{jk}^{(i)} - l_{ji} \cdot a_{ik}^{(i)}$$

$$b_j^{(i+1)} = b_j^{(i)} - l_{ji} b_i^{(i)}$$

Setze die restlichen Einträge auf 0.

Für $i = n \dots 1$

$$x_i = \left(b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)} x_j \right) / a_{ii}^{(i)}.$$

Hierbei benötigen wir die Matrizen $A^{(k)}$ zur Berechnung der Lösung nicht, es liegt also nahe, jeweils $A^{(k)}$ mit $A^{(k+1)}$ zu überschreiben. Es wird also im Laufe des Algorithmus kein zusätzlicher Speicherplatz benötigt.

Wir bestimmen den Aufwand zur Lösung des Systems. Wir vereinbaren zunächst: Da Addition und Multiplikation fast immer zusammen auftreten, zählen wir sie als eine **Rechenoperation**. Tatsächlich sind moderne Rechnerarchitekturen in der Lage, diese beiden Operationen gleichzeitig durchzuführen (fused multiply add).

Für das Auflösen des Gleichungssystems werden dann

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left(2 + \sum_{k=i+1}^n 1 \right) = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 - 5n) = \frac{1}{6}n(n-1)(2n+5)$$

Rechenoperationen und n Divisionen benötigt, wobei wir für die einzelnen Divisionen jeweils einmal den Kehrwert der $a_{ii}^{(i)}$ ausrechnen und dann mit ihm multiplizieren. Die Division ist nämlich tatsächlich recht aufwändig, einen Algorithmus zu ihrer schnellen Berechnung (mit einigen Rechenoperationen) werden wir im Kapitel über die Newton–Iteration herleiten.

Zur Durchführung des Rückwärtseinsetzens erhalten wir

$$\sum_{i=1}^n \left(2 + \sum_{j=i+1}^n 1 \right) = n^2/2 + 7/2 n.$$

Alle Berechnungen dieser Art interessieren uns immer nur für große n . Dann dominieren aber sofort die Terme mit hoher Potenz die mit kleiner, und nur der Leitterm mit der höchsten Potenz ist interessant. Es würde also reichen, den größten Term (mit einer Abschätzung für den Rest) zu kennen.

Für h nah bei 0 ist es genau umgekehrt: Hier ist etwa $h^2 \ll h$, d.h. hier sind die kleinen Potenzen wichtig. Wir definieren daher das Landau-Symbol:

Definition 4.1 (Landau–Symbole)

1. Sei $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$.

$$f(n) = O(n^p) \text{ für große } n \Leftrightarrow \exists C > 0 : |f(n)| \leq Cn^p \forall n > 0.$$

2. Sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

$$f(h) = O(h^p) \text{ für kleine } h \Leftrightarrow \exists C > 0 : |f(h)| \leq C|h|^p \forall |h| \leq 1.$$

Beispiel 4.2

1. $O(n^\alpha) = O(n^\beta)$ für $0 < \alpha \leq \beta$.
 $\sin(n) = O(1)$.

2. $O(h^\alpha) = O(h^\beta)$ für $\alpha \geq \beta > 0$.
 $\sin(h) = O(1)$
 $\sin(h) = O(h)$

Mit dieser Konvention gilt

Satz 4.3 Die Auflösung einer Gleichung mit n Unbekannten mit dem Gauß-Algorithmus benötigt $n^3/3 + O(n^2)$ Rechenoperationen und n Divisionen.

Bemerkung:

1. Die Cramersche Regel rechnet die Determinanten der Matrix aus, was bei direkter Berechnung die Komplexität $n!$ hat (und damit völlig unbrauchbar ist).
2. Die Gauss-Elimination ist durchführbar genau dann, wenn alle $a_{ii}^{(i)} \neq 0$ (dann können wir die Divisionen durchführen).
3. Falls $a_{ii}^{(i)} = 0$, aber $a_{ki}^{(i)} \neq 0$ für ein $k > i$, so vertausche die k . und die i . Zeile des Gleichungssystems (was die Lösung natürlich nicht ändert).
4. Falls $a_{ki}^{(i)} = 0$ für alle $k \geq i$, so ist x_i aus den Gleichungen i bis n bereits eliminiert, und der i . Schritt muss gar nicht erst durchgeführt werden. In diesem Fall hat $A^{(i)}$ die Form

$$\begin{pmatrix} * & & & & & & \\ 0 & * & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & * & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & * & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & * & \end{pmatrix}$$

Entwicklung der Determinante nach der ersten Spalte zeigt sofort: Dann ist $A^{(i)}$ singulär, und damit auch A . Falls A invertierbar ist, kann dieser Fall also nicht auftreten.

Die Gauss-Elimination ist auf einer Permutation des Systems immer ausführbar.

5. Fehleranalyse: Eine genaue Fehleranalyse ist für den Gauß-Algorithmus schwierig. Wir betrachten nur die Berechnung von x_1 . \tilde{x}_1 wird berechnet durch

$$\tilde{x}_1 = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - \underbrace{\sum_{k=2}^n a_{1k} \tilde{x}_k}_{a_{11} x_1} \right).$$

Ist nun $|a_{11}x_1|$ klein gegenüber b_1 , so kann dies nur dadurch entstanden sein, dass in der Differenz Auslöschung aufgetreten ist. Fehler werden also stark verstärkt, wenn $|a_{11}|$ klein ist. Wir ordnen deshalb im i . Schritt die Gleichungen so an, dass das Diagonalelement in der i . Spalte unterhalb der Hauptdiagonalen betragsmaximal ist, dass also gilt

$$|a_{ii}^{(i)}| = \max_{k \geq i} |a_{ki}^{(i)}|.$$

Diese Strategie heißt **Spaltenpivotsuche** und macht den Gaußalgorithmus bereits zu einem stabilen (in praktischen Fällen).

Wir rechnen dazu ein kurzes Beispiel, zunächst ohne Pivotsuche. Wir benutzen zur Rechnung einen Rechner mit $b = 10$ und $p = 2$, also mit zwei Stellen.

$$\begin{array}{rcl} 10^{-4} x_1 + & x_2 & = 1 + 10^{-4} \\ x_1 + & x_2 & = 2 \\ \\ 10^{-4} x_1 + & x_2 & = 1 \\ \underbrace{(-10^4 + 1)}_{=-10^4} x_2 & = & \underbrace{-10^4 + 2}_{=-10^4} \end{array}$$

und damit $\tilde{x}_2 = -10^4 / -10^4 = 1$ und $\tilde{x}_1 = (1 - 1) / 10^{-4} = 0$. Da $x = (1, 1)$ die korrekte Lösung ist, hat x_1 einen Fehler von 100% (genau wie oben vorausgesagt sorgt die Auslöschung beim Rückwärtseinsetzen für einen großen Fehler). Die Kondition der Matrix ist kleiner als drei, dieser Fehler ist also nicht unvermeidbar. Nun dasselbe mit Pivotsuche:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + & x_2 & = 2 \\ 10^{-4} x_1 + & x_2 & = 1 + 10^{-4} \\ \\ x_1 + & x_2 & = 2 \\ \underbrace{(1 - 10^{-4})}_{=1} x_2 & = & \underbrace{1 - 2 \cdot 10^{-4}}_{=1} \end{array}$$

und wir erhalten die korrekte Lösung $x_2 = 1, x_1 = 1$.

Die Matrix $A^{(n)}$ hat Zeilenstufenform, d.h. unterhalb der Hauptdiagonalen stehen nur Nullen.

Definition 4.4 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Falls alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen Null sind, so heißt A **rechte obere Dreiecksmatrix**.

Entsprechend heißt A **linke untere Dreiecksmatrix**, falls alle Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen Null sind.

Falls auf der Hauptdiagonalen von L nur Einsen stehen, so heißt L normiert.

Definition 4.5

1. Eine normierte linke untere Dreiecksmatrix $L = (l_{kj})$ heißt **Elementarmatrix**, wenn nur in einer Spalte i unterhalb der Hauptdiagonalen Einträge ungleich 0 stehen.
2. Eine Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **Permutationsmatrix**, falls in jeder Zeile und Spalte genau eine 1 auftaucht und alle anderen Einträge 0 sind, d.h.

$$\exists \sigma \in \{1 \dots n\}^n : \sigma_k \neq \sigma_j \text{ für } k \neq j, a_{i,k} = \begin{cases} 1, & k = \sigma_i \\ 0, & k \neq \sigma_i \end{cases}.$$

Beispiel 4.6

$$L^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{n,i} & & & 1 \end{pmatrix}$$

ist Elementarmatrix.

$$P = \begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & \end{pmatrix}, P^t = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & 1 & & & \end{pmatrix}$$

sind Permutationsmatrizen zu $\sigma = (2, 3, 4, 1)$ bzw. $(4, 1, 2, 3)$. Offensichtlich gilt

$$PP^t = P^tP = I.$$

Bemerkung:

1. LA lässt die ersten i Zeilen von A konstant und subtrahiert jeweils von den Zeilen $j = i + 1, \dots, n$ das $l_{j,i}$ -fache der i . Zeile. Dies ist genau die Operation, die den i . Eliminationsschritt durchführt.
2. Diese Operation kann man rückgängig machen, indem man auf die Zeilen $j = i + 1, \dots, n$ das $l_{j,i}$ -fache der i . Zeile addiert. Die Inverse von L erhält man also einfach durch Streichen des Minuszeichens.
3. Das Produkt zweier Elementarmatrizen $L^{(i)}L^{(i+1)}$ zu den Spalten i und $i + 1$ ist eine normierte linke untere Dreiecksmatrix, die unterhalb der Hauptdiagonalen die Elemente $l_{j,i}$ und $l_{j,i+1}$ enthält.

Begründung: Statt erst ein Vielfaches der $(i + 1)$. und dann ein Vielfaches der i . Zeile zu addieren, kann man beides gleichzeitig tun.

4. PA bringt die Zeilen von A in die Reihenfolge $\sigma_1 \dots \sigma_n$.

Offensichtlich sind das genau die Matrizen, die wir zur exakten Beschreibung des Gauß-Algorithmus benötigen. Wir formulieren dies als

Satz 4.7 (LR-Zerlegung)

Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Dann gibt es eine Permutationsmatrix P zur Permutation σ , eine normierte linke untere Dreiecksmatrix L und eine rechte obere Dreiecksmatrix R (alles $(n \times n)$), so dass

$$PA = LR.$$

L und R heißen LR-Zerlegung von PA .

Beweis: Wir wissen bereits, dass die Gausselimination auf einer Permutation der Matrix durchführbar ist. Sei PA diese Permutation.

Es sei $A^{(1)} = PA$. Dann gilt $A^{(2)} = L^{(1)}A^{(1)} = L^{(1)}PA$, $A^{(3)} = L^{(2)}A^{(2)} = L^{(2)}L^{(1)}PA$ usw. Insbesondere

$$R := A^{(n)} = L^{(n-1)} \dots L^{(1)}PA.$$

Damit gilt

$$PA = \underbrace{(L^{(1)})^{-1} \dots (L^{(n-1)})^{-1}}_L R.$$

Nach Vorbemerkung 2 und 3 gilt

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{2,1} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n,1} & \dots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix},$$

insbesondere ist R rechte obere und L normierte linke untere Dreiecksmatrix. \square

Für unser Beispiel vom Anfang, das wir ohne Zeilenpermutationen durchgeführt hatten, gilt

$$P = I, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

Im zweiten Beispiel zur Spaltenpivotsuche gilt

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung:

1. Sei $PA = LR$. Dann kann $Ax = b$ gelöst werden durch

$$\begin{aligned} Ax = b &\iff PAx = Pb \\ &\iff LRx = Pb \\ &\iff Ly = Pb, Rx = y \end{aligned}$$

Dabei wird y bestimmt durch **Vorwärtseinsetzen** (Auflösung der Gleichungen von vorn nach hinten) in $Ly = Pb$ und x durch **Rückwärtseinsetzen** (Auflösung der Gleichungen von hinten nach vorn) in $Rx = y$.

2. Nicht jede invertierbare Matrix besitzt eine LR -Zerlegung. Angenommen, es gilt etwa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c \\ ab & ac + d \end{pmatrix}.$$

Dann gilt offensichtlich $b = 0$, also $ab = 0 \nmid$.

3. Es gibt singuläre Matrizen, die eine LR -Zerlegung besitzen.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Die LR -Zerlegung mit Spaltenpivotsuche und Vorwärts–Rückwärtseinsetzen ist für praktische Zwecke ein gutartiger Algorithmus zur Bestimmung der Lösung eines linearen Gleichungssystems.
5. Der Aufwand zur Berechnung der LR -Zerlegung beträgt $n^3/3 + O(n^2)$ Rechenoperationen ($+n$ Divisionen). Der Aufwand für das Einsetzen beträgt $n^2 + O(n)$.

Satz 4.8 (Eindeutigkeit der LR -Zerlegung) Sei A eine invertierbare $n \times n$ -Matrix. Falls A eine LR -Zerlegung besitzt, so ist diese Zerlegung eindeutig.

Beweis: Wir benutzen ohne Beweis das Lemma: Die linken unteren und rechten oberen Dreiecksmatrizen bilden einen Ring, d.h. Summe, Produkt und Inverse sind wieder linke untere bzw. rechte obere Dreiecksmatrix. Produkte von normierten Dreiecksmatrizen sind wieder normiert.

A besitze die LR -Zerlegungen (L, R) und (L', R') . Da A invertierbar ist, sind auch die Dreiecksmatrizen invertierbar. Es gilt

$$A = LR = L'R' \implies (L')^{-1}L = R'R^{-1} =: Z.$$

Z ist Produkt linker unterer normierter Dreiecksmatrizen, also selbst wieder normierte linke untere Dreiecksmatrix. Andererseits ist Z Produkt rechter oberer Dreiecksmatrizen, also selbst wieder rechte obere Dreiecksmatrix. Damit ist Z Diagonalmatrix und hat, weil sie normiert ist, 1 auf der Hauptdiagonalen, ist also die Einheitsmatrix. Damit gilt

$$L = L' \text{ und } R = R'.$$

□

Kapitel 5

Über- und unterbestimmte Gleichungssysteme

Wir haben bereits in der Einleitung gesehen, dass in Anwendungen nicht notwendig die Anzahl der Gleichungen und Variablen in einem linearen Gleichungssystem übereinstimmen. Sollen etwa bei einer Landvermessung Positionen bestimmt werden, so macht man typischerweise mehr Messungen als notwendig, um Messfehler ausgleichen zu können. Das bekannteste Beispiel findet sich bei Gauss, der die Theorie dazu in seinem Buch “Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae” veröffentlichte (die Society for Industrial and Applied Mathematics hat freundlicherweise für die Nicht-Lateiner eine englische Übersetzung veröffentlicht). Der alte 10 DM-Schein erinnerte an diese Arbeit von Gauss. Eine andere Motivation ist die Betrachtung von Ausgleichsgeraden (für beide Beispiele siehe Vorlesung).

Mögliche Probleme bei der Lösung sind:

1. Es gibt keine Lösung (überbestimmtes System), im allgemeinen mehr Gleichungen als Unbekannte
2. Es gibt unendlich viele Lösungen (unterbestimmtes System), im allgemeinen weniger Gleichungen als Unbekannte

5.1 Kleinste Quadrate-Lösung

Falls es keine Lösung gibt, suchen wir Vektoren x^* , für die das Residuum $Ax^* - b$ zwar nicht 0, aber doch möglichst klein ist. In diesem gesamten Kapitel verwenden wir dazu die euklidische Norm.

Definition 5.1 (kleinste Quadrate-Lösung, least squares solution) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. $x^* \in \mathbb{R}^n$ heißt kleinste Quadrate-Lösung (kQL) von $Ax = b$ genau dann, wenn

$$\|Ax^* - b\|_2^2 \leq \|Ax - b\|_2^2 \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Bemerkung: Wir machen keine Voraussetzungen an m , n oder den Rang von A .

Bemerkung: Falls $Ax = b$ Lösungen besitzt, so sind genau diese auch die kleinste Quadrate-Lösungen.

Wir halten mal direkt fest: Falls A die Nullmatrix ist, so gilt für jedes $x^* \in \mathbb{R}^n$

$$\|Ax^* - b\|_2^2 = \|b\|_2^2 = \|Ax - b\|_2^2 \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Damit sind alle Vektoren aus dem \mathbb{R}^n kleinste Quadrate-Lösungen, insbesondere ist die kQL also nicht notwendig eindeutig.

Leider hilft uns diese Definition nicht bei der Berechnung der kleinsten Quadrate-Lösung. Wir geben daher eine zur Definition äquivalente Bedingung an. Sei im Folgenden immer $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Wir beschränken uns hier der Einfachheit halber auf reelle Matrizen, obwohl alles sofort auch ins Komplexe übertragbar ist. Wir beginnen mit

Lemma 5.2 Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

1.

$$\text{Bild}(A)^\perp = \text{Ker}(A^t).$$

2.

$$\mathbb{R}^m = \text{Bild}(A) \oplus \text{Bild}(A)^\perp = \text{Bild}(A) \oplus \text{Ker}(A^t)$$

3.

$$\text{Ker}(A^t A) = \text{Ker}(A).$$

Hierbei ist \oplus die orthogonale Summe.

Beweis:

1. Sei $y \in \text{Ker}(A^t) \subset \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig.

$$y \in \text{Ker}(A^t) \Rightarrow A^t y = 0 \Rightarrow 0 = (A^t y, x) = (y, Ax) \Rightarrow y \in \text{Bild}(A)^\perp,$$

also $\text{Ker}(A^t) \subset \text{Bild}(A)^\perp$. Sei nun $y \in \text{Bild}(A)^\perp$. Dann gilt

$$0 = (y, AA^t y) = (A^t y, A^t y) = \|A^t y\|_2^2$$

und damit $y \in \text{Ker}(A^t)$, insgesamt also $\text{Ker}(A^t) = \text{Bild}(A)^\perp$.

2. Klar nach 1.

3. Übungen.

□

Satz 5.3 (Gauss–Normalgleichung)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. $x^* \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann kleinste Quadrate–Lösung von $Ax = b$, falls

$$A^t Ax^* = A^t b.$$

Diese Gleichung heißt Gauss'sche Normalgleichung. Die Menge der kleinste Quadrate–Lösungen ist nicht leer.

Beweis: Nach Lemma 5.2 gibt es b_1, b_2, x^* mit

$$b = b_1 + b_2, b_1 \in \text{Bild}(A) \Rightarrow b_1 = Ax^*, b_2 \in \text{Ker}(A^t), b_1 \perp b_2.$$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|\underbrace{Ax - b_1}_{\in \text{Bild}(A)} - \underbrace{b_2}_{\in \text{Ker}(A^t)}\|_2^2 = \|Ax - b_1\|_2^2 + \|b_2\|_2^2 \geq \underbrace{\|Ax^* - b_1\|_2^2}_{=0} + \|b_2\|_2^2.$$

x^* ist also kleinste Quadrate–Lösung.

Weiter ist ein $x \in \mathbb{R}^n$ genau dann kleinste Quadrate–Lösung, wenn $\|Ax - b_1\|_2^2 = 0$.

Damit gilt $Ax = b_1 = Ax^*$, also

$$A(x - x^*) = 0 \iff_{\text{Lemma 5.2}} 0 = A^t A(x - x^*) = A^t Ax - A^t Ax^* = A^t Ax - A^t (b_1 + \underbrace{b_2}_{\in \text{Ker}(A^t)}),$$

also $A^t Ax = A^t b$.

□

Bemerkung: Seien x_1^*, x_2^* zwei kleinste Quadrate–Lösungen. Dann gilt

$$x_1^* - x_2^* \in \text{Ker}(A^t A) = \text{Ker}(A).$$

Die kleinste Quadrate–Lösung ist also genau dann **eindeutig**, wenn A den Rang n hat. Im Allgemeinen ist sie es **nicht**.

Beispiel 5.4

1. Eine feste Länge L wird m -mal gemessen mit Ergebnissen l_1 bis l_m . Das zugehörige überbestimmte Gleichungssystem lautet

$$\begin{array}{l} L = l_1 \\ L = l_2 \\ \vdots \\ L = l_m \end{array} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_A L = \underbrace{\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix}}_b.$$

Es gilt

$$A^t A = (1, \dots, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = m$$

und

$$A^t b = (1, \dots, 1) \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix} = l_1 + l_2 + \dots + l_m.$$

Für die kleinste Quadrate-Lösung L^* erhalten wir also

$$mL^* = A^t A L^* = A^t b = l_1 + l_2 + \dots + l_m$$

und damit

$$L^* = \frac{\sum_{i=1}^m l_i}{m},$$

also, nicht sehr überraschend, den Mittelwert der l_i .

2. Zu Zeitpunkten t_i werden die Messwerte y_i gemessen, $i = 1 \dots 4$.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} t_i & -2 & 0 & 1 & 1 \\ \hline y_i & -2 & -4 & 4 & 6 \end{array}.$$

Es wird ein linearer Zusammenhang der Form $y(t) = at + b$ vermutet. Wir bestimmen die Ausgleichsgerade. Das überbestimmte Gleichungssystem lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Die Normalgleichung lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

und damit erhalten wir die Ausgleichsgerade $(7/3)x + 1$.

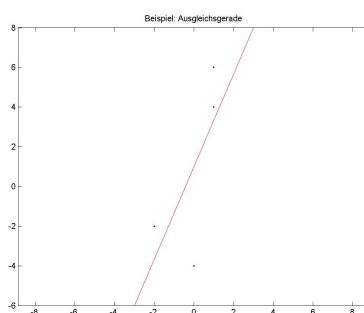


Abbildung 5.1: Beispiel zur Ausgleichsgeraden

Sei A die $m \times n$ -Nullmatrix. Dann ist jedes $x \in \mathbb{R}^n$ kleinste-Quadrate-Lösung von $Ax = b$, denn

$$A^t Ax = 0 = A^t b.$$

5.2 Die Minimum Norm-Lösung

Im allgemeinen ist die kleinste Quadrate-Lösung nicht eindeutig. Wir wählen in diesen Fällen eine spezielle aus, nämlich die mit kleinster Norm. Dies führt zur Definition der Minimum-Norm-Lösung.

Definition 5.5 (Minimum Norm-Lösung, verallgemeinerte Lösung, Moore-Penrose-Lösung)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. $x^+ \in \mathbb{R}^n$ heißt Minimum Norm-Lösung von $Ax = b$ genau dann, wenn gilt

1. x^+ ist kleinste Quadrate-Lösung von $Ax = b$.

2. x^+ hat unter allen kleinste Quadrate-Lösungen von $Ax = b$ die kleinste Norm, d.h.

$$\|x^+\| \leq \|x^*\| \forall x^* : x^* \text{ ist kleinste Quadrate-Lösung von } Ax = b$$

Bemerkung: Wir machen keine Voraussetzungen an m , n oder den Rang von A .

Diese Definition erlaubt uns noch nicht die direkte Berechnung von x^+ . Wir geben wieder eine zum Optimierungsproblem äquivalente nachrechenbare Bedingung an.

Satz 5.6 (Berechnung und Eindeutigkeit der Minimum Norm-Lösung)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. x^+ ist genau dann Minimum Norm-Lösung von $Ax = b$, falls gilt

1. $A^t Ax^+ = A^t b$.
2. $x^+ \in \text{Bild}(A^t)$.

Die Minimum Norm-Lösung ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei x^* eine kleinste Quadrate-Lösung von $Ax = b$. Nach Lemma 5.2, angewandt auf A^t , können wir zerlegen

$$x^* = x^+ \oplus x_2, \quad x^+ \in \text{Bild}(A^t), \quad x_2 \in \text{Ker}(A).$$

Damit gilt

$$A(x^* - x^+) = Ax_2 = 0$$

und damit

$$A^t Ax^+ = A^t A(x^+ + (x^* - x^+)) = A^t Ax^* = A^t b,$$

also ist auch x^+ kleinste Quadrate-Lösung. Sei nun \bar{x} eine weitere kleinste Quadrate-Lösung. Mit der Bemerkung zu Satz 5.3 gilt

$$\bar{x} = x^+ + w, \quad w \in \text{Ker}(A)$$

und wieder mit Pythagoras

$$\|\bar{x}\|_2^2 = \|x^+ + w\|_2^2 = \underbrace{\|x^+\|_2^2}_{\in \text{Bild}(A^t)} + \underbrace{\|w\|_2^2}_{\in \text{Ker}(A)} = \|x^+\|_2^2 + \|w\|_2^2 \geq \|x^+\|_2^2.$$

Also ist x^+ Minimum Norm-Lösung. Gleichheit bekommen wir genau dann, wenn $w = 0$, also $\bar{x} = x^+ + w = x^+$, die Minimum Norm-Lösung ist also eindeutig. \square

Beispiel 5.7

1. Sei A die $m \times n$ -Nullmatrix, $b \in \mathbb{R}^m$ beliebig. Dann erfüllt jedes $x^* \in \mathbb{R}^n$ die Normalengleichung

$$A^t A x^* = A^t b$$

und ist damit kleinste Quadrate-Lösung. Die Minimum Norm-Lösung ist unter diesen die mit kleinster Norm, also $x^+ = 0$. Offensichtlich ist x^+ auch eindeutig bestimmt durch die Bedingung

$$x^+ \in \text{Bild}(A^t) = \{0\}.$$

2. Wir suchen die Minimum Norm-Lösung des Ausgleichsproblems für eine einzelne Messung (t_1, y_1) und den linearen Ansatz $at + b$. (a, b) ist kleinste Quadrate-Lösung, also muss gelten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ t_1 & t_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ ty_1 \end{pmatrix}$$

oder

$$b + at_1 = y_1.$$

Da in diesem Fall Lösungen von $Ax = b$ existieren, sind genau diese natürlich auch die kleinste Quadrate-Lösungen, den Ansatz über die Normalengleichung hätten wir uns also sparen können.

Wegen

$$x^+ \in \text{Bild}(A^t) = \{A^t u \mid u \in \mathbb{R}^m\} = \{(u, t_1 u)^t \mid u \in \mathbb{R}\}$$

gilt für ein u : $b = u$, $a = t_1 u$ und

$$y_1 = b + at_1 = u + t_1^2 u$$

und damit

$$u = \frac{y_1}{1 + t_1^2}$$

und die gesuchte Gerade ist

$$y(t) = \frac{y_1 t_1}{1 + t_1^2} t + \frac{y_1}{1 + t_1^2}.$$

Insbesondere erfüllt diese Gerade natürlich $y(t_1) = y_1$. Tatsächlich hat diese Gerade eine kleinere 2-Norm auf den Koeffizienten als die eigentlich viel naheliegendere Lösung $y(t) = y_1$.

5.3 Die Pseudoinverse

Falls $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ maximalen Rang hat (also $\text{Rang}(A) = \min(n, m)$), so lässt sich die Minimum Norm–Lösung durch Matrixinversion berechnen.

Satz 5.8 Pseudoinverse, Moore–Penrose–Inverse, verallgemeinerte Inverse

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Die Abbildung $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$, $A^+b = x^+$, x^+ Minimum Norm–Lösung von $Ax = b$, ist linear. A^+ heißt Pseudoinverse (Moore–Penrose–Inverse, verallgemeinerte Inverse) von A .

1. Falls $n = m$ und A invertierbar, so gilt $A^+ = A^{-1}$.
2. Falls $m > n$ und A injektiv ($\text{Rang}(A) = n$), so ist $A^t A$ invertierbar und

$$A^+ = (A^t A)^{-1} A^t.$$

3. Falls $m < n$ und A surjektiv ($\text{Rang}(A) = m$), so ist AA^t invertierbar und

$$A^+ = A^t (AA^t)^{-1}.$$

Beweis: Sei $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

1. Falls A invertierbar ist ($\text{Rang}(A) = m = n$), so ist die einzige kleinste Quadrate–Lösung die eindeutige Lösung von $Ax = b$, also gilt

$$A^+ = A^{-1}.$$

2. Für $m > n$ ist der Zielraum in der Dimension größer als der Urbildraum. A kann also nicht surjektiv sein, aber injektiv. Sei A injektiv, d.h. $\text{Rang}(A) = n$. Wegen $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^t A)$ ist auch $A^t A$ injektiv, also invertierbar. x^+ erfüllt die Normalengleichung

$$A^t A x^+ = A^t b$$

also

$$x^+ = (A^t A)^{-1} A^t b.$$

3. Für $m < n$ ist der Urbildraum in der Dimension größer als der Zielraum. A kann also nicht injektiv sein, aber surjektiv. Sei A surjektiv, d.h. $\text{Rang}(A) = m$. Dann gibt es Lösungen von $Az = b$, und genau diese sind die kleinste Quadrate–Lösungen.

Wegen

$$\text{Rang}(A^t) = \text{Rang}(A) = \dim \text{Bild}(A) = m$$

ist A^t injektiv, also ist AA^t invertierbar. Wegen $x^+ \in \text{Bild}(A^t)$ gilt $x^+ = A^t y$ für ein $y \in \mathbb{R}^m$, also

$$b = Ax^+ = AA^t y$$

und damit

$$x^+ = A^t y = A^t (AA^t)^{-1} b.$$

□

Kapitel 6

Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme

Wir werden als Grundlage den aus der Analysis bekannten Banachschen Fixpunktsatz beweisen, und daraus iterative Methoden für lineare und nichtlineare Probleme herleiten. Im ganzen Kapitel sind die Matrizen A immer quadratisch und invertierbar, wir betrachten zunächst keine über- oder unterbestimmten Gleichungssysteme.

6.1 Der Banachsche Fixpunktsatz

Definition 6.1 (kontrahierend, Fixpunkt)

Seien X, Y normierte Räume, $D \subset X$.

1. Eine Funktion

$$g : D \mapsto Y$$

heißt kontrahierend in D genau dann, wenn eine Konstante $0 < q < 1$ existiert mit

$$\|g(x) - g(y)\| \leq q\|x - y\| \quad \forall x, y \in D.$$

q heißt Kontraktionskonstante).

2. Sei $g : D \mapsto X$. $\bar{x} \in D$ heißt Fixpunkt von g genau dann, wenn

$$g(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Bemerkung: Sei g kontrahierend. Dann ist g stetig.

Beweis: Sei x_n eine gegen x konvergente Folge, dann gilt

$$\|g(x_n) - g(x)\| \leq q\|x_n - x\| \mapsto 0.$$

□

Satz 6.2 (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei X ein vollständiger normierter Raum (Banachraum). Sei $\emptyset \neq D \subset X$ abgeschlossen, d.h. jede Cauchyfolge in D konvergiert in D .

Sei $g : D \mapsto D$ kontrahierend. Dann hat g genau einen Fixpunkt.

Beweis: Sei $q < 1$ Kontraktionskonstante von g .

Seien zunächst x und y zwei Fixpunkte von g . Dann gilt

$$\|x - y\| = \|g(x) - g(y)\| \leq q\|x - y\|,$$

also $x = y$ wegen $q < 1$. Damit ist der Fixpunkt eindeutig.

Die Existenz zeigen wir konstruktiv und geben eine konvergente Folge an, deren Grenzwert der Fixpunkt ist. Sei $x^{(0)} \in D$ beliebig. Wir definieren in D die Folge $x^{(k)}$ durch

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}).$$

$x^{(k)}$ heißt **Fixpunktiteration**.

g ist kontrahierend, also gilt mit der Definition von $x^{(k)}$

$$\begin{aligned} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| &= \|g(x^{(k)}) - g(x^{(k-1)})\| \\ &\leq q\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \\ &\leq q^2\|x^{(k-1)} - x^{(k-2)}\| \\ &\vdots \\ &\leq q^k\|x^{(1)} - x^{(0)}\|. \end{aligned}$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig und M so groß, dass

$$\frac{q^M}{1 - q}\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \leq \epsilon.$$

Seien $l, k > M$ und ohne Einschränkung $l \geq k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|x^{(l)} - x^{(k)}\| &\leq \underbrace{\|x^{(l)} - x^{(l-1)}\|}_{\leq q^{l-1}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|} + \underbrace{\|x^{(l-1)} - x^{(l-2)}\|}_{\leq q^{l-2}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|} + \dots + \underbrace{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}_{\leq q^k\|x^{(1)} - x^{(0)}\|} \\ &\leq q^k \sum_{j=0}^{l-k-1} q^j \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \\ &\leq \frac{q^k}{1 - q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \\ &\leq \epsilon \end{aligned} \tag{6.1}$$

nach Wahl von k und M . Also ist $x^{(k)}$ eine Cauchyfolge in D und hat einen Grenzwert $\bar{x} \in D$. Es gilt, da g stetig ist,

$$x_{k+1} = g(x_k) \implies_{k \rightarrow \infty} \bar{x} = g(\bar{x}),$$

also ist \bar{x} Fixpunkt und wegen der Vorbemerkung der einzige Fixpunkt von g . \square

Korollar 6.3 (Konvergenz der Fixpunktiteration)

Seien für g die Voraussetzungen aus 6.2 erfüllt, insbesondere g kontrahierend. Dann konvergiert die Fixpunktiteration

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}), x^{(0)} \in D$$

gegen einen Fixpunkt von g .

Wenn wir die Fixpunktiteration zur approximativen Berechnung des Fixpunkts nutzen wollen, brauchen wir Abschätzungen, wie nah ein Folgenglied bereits am Grenzwert liegt.

Korollar 6.4 Fehlerabschätzung

Seien für g die Voraussetzungen aus 6.2 erfüllt, und q sei die Kontraktionskonstante von g . Es gilt

$$\|\bar{x} - x^{(k)}\| = \lim_{l \rightarrow \infty} \|x^{(l)} - x^{(k)}\| \leq \frac{q^k}{1 - q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

mit (6.1).

Sei $y^{(j)}$ eine zweite Fixpunktiteration mit Startwert $x^{(k)}$. Dann lautet die Abschätzung, angewandt auf $y^{(0)}$

$$\|\bar{x} - x^{(k)}\| = \|\bar{x} - y^{(0)}\| \leq \frac{1}{1 - q} \|y^{(1)} - y^{(0)}\| = \frac{1}{1 - q} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$$

oder angewandt auf $y^{(1)}$

$$\|\bar{x} - x^{(k+1)}\| = \|\bar{x} - y^{(1)}\| \leq \frac{q}{1 - q} \|y^{(1)} - y^{(0)}\| = \frac{q}{1 - q} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|.$$

Mit Hilfe der ersten Abschätzung können wir im Vorhinein (a priori) eine obere Schranke für den Konvergenzfehler angeben. Mit Hilfe der zweiten Abschätzung können wir im Nachhinein (a posteriori), wenn wir also bereits das $k + 1$. Folgenglied berechnet haben, ebenfalls eine obere Schranke angeben. Notwendigerweise ist die a priori–Abschätzung eine worst case–Abschätzung, während die a posteriori–Abschätzung auf dem tatsächlichen Folgenverlauf basiert. Deshalb ist normalerweise die a posteriori–Abschätzung deutlich schärfer.

Bevor wir uns einige Beispiele anschauen, bemerken wir ein nützliches Kriterium zur Kontraktionseigenschaft.

Satz 6.5 (Abschätzung der Kontraktionskonstante für differenzierbare Funktionen)
 Seien $g : D \mapsto \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, und g sei stetig differenzierbar. Es gelte

$$\|g'(x)\| \leq q < 1 \forall x \in D,$$

wobei $g'(x)$ die Jakobimatrix von g an der Stelle x ist und $\|\cdot\|$ die induzierte Matrixnorm. Weiter sei D konvex. Dann ist g kontrahierend mit der Kontraktionskonstante q .

Falls $\|g'(x)\| \geq 1$ für ein x im Inneren von D , so ist g in einer Umgebung von x nicht kontrahierend.

Beweis: Seien $x, y \in D$. Da D konvex ist, liegt die Strecke von x nach y ganz in D , und nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in D$ zwischen x und y mit

$$g(x) - g(y) = g'(\xi)(x - y).$$

Insbesondere ist damit

$$\|g(x) - g(y)\| = \|g'(\xi)(x - y)\| \leq \|g'(\xi)\| \|x - y\| \leq \underbrace{\sup_{\xi \in D} \|g'(\xi)\|}_{=: q < 1} \|x - y\|.$$

Für die zweite Bemerkung wähle $y = x + \epsilon u$ für ein beliebiges $u \in \mathbb{R}^n$ mit Norm 1 und betrachte $\epsilon \mapsto 0$. Dann konvergiert

$$\frac{\|g(x) - g(y)\|}{\|x - y\|} \mapsto \|g'(x)u\|.$$

Da $\|g'(x)\| \geq 1$ in der induzierten Matrixnorm, ist die rechte Seite nicht durch ein $q < 1$ nach oben beschränkt. Am einfachsten macht man sich dieses Argument für $n = 1$ klar. □

Beispiel 6.6 1. Es sei

$$B \in \mathbb{R}^{n \times n}, c \in \mathbb{R}^n, g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, g(x) := Bx + c.$$

Dann gilt $g'(x) = B$ und g ist kontrahierend genau dann, wenn $\|B\| < 1$ in der induzierten Matrixnorm.

Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind dann erfüllt, und alle Fixpunktfolgen konvergieren gegen den eindeutig bestimmten Fixpunkt

$$\bar{x} = (I - B)^{-1}c.$$

2. Es sei

$$g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) := 0.9 \cos x.$$

Es gilt $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|g'(x)| = |-0.9 \sin x| \leq 0.9 =: q < 1.$$

Also ist g kontrahierend mit der Kontraktionskonstanten $q = 0.9$.

Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind dann erfüllt.

3. Es sei

$$g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) := \cos x.$$

Da $|g'(\pi/2)| = |-\sin(\pi/2)| = 1$, ist g nicht kontrahierend.

4. Es sei

$$g : [-0.1, 0.1] \mapsto \mathbb{R}, g(x) := \cos x.$$

Es gilt für $x \in [-0.1, 0.1]$

$$|g'(x)| \leq 0.5 < 1,$$

also ist g kontrahierend.

g ist aber keine Selbstabbildung, daher sind die Voraussetzungen von Banach nicht erfüllt.

5. Es sei $D := [0.6, 0.9]$ und

$$g : D \mapsto D, g(x) := \cos x.$$

g ist wieder kontrahierend, denn $|g'(x)| \leq 0.9 < 1$ für $x \in D$.

Da g monoton ist und $g(0.6) \sim 0.82 \in D$, $g(0.9) \sim 0.62 \in D$ gilt $g(D) \subset D$ und g ist korrekt definiert, also Selbstabbildung.

Also sind alle Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach erfüllt.

6. Bemerkung: g kann in einer induzierten Norm kontrahierend sein, in einer anderen nicht. Für die Matrix

$$B = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

gilt $\|B\|_\infty = 1.2$, aber $\|B\|_2 = 0.97$, es ist also die Fixpunktiteration zu $g(x) := Bx + c$ kontrahierend in der euklidischen Norm, aber nicht kontrahierend in der Supremumsnorm.

7. Bemerkung: Die Formulierung einer Fixpunktgleichung ist wichtig bei der Betrachtung von Fixpunktfolgen.

Gesucht sei der Fixpunkt von

$$g(x) := \tan x$$

im Intervall $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Es gilt

$$g'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2} \geq 1$$

und g ist nicht kontrahierend. Wir betrachten die Umkehrfunktion. Es gilt

$$x = \arctan x + \pi =: g(x), \quad g'(x) = \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{2} =: q < 1.$$

in unserem Intervall, und g ist kontrahierend.

6.2 Iterative Fixpunktverfahren für lineare Gleichungen

Gesucht sei eine Approximation an die Lösung \bar{x} des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit Genauigkeit ϵ . $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei invertierbar und dünn besetzt (sparse), d.h. A habe viele Nullen. Dann vermutet man, dass sich das Gleichungssystem schnell lösen lässt. Manchmal ist dies der Fall (etwa für Bandmatrizen wie die Matrix der Wärmeleitungsgleichung), aber nicht immer (Fillin, siehe Beispiel der Vorlesung, im Verlauf der LR-Zerlegung werden die Nullen der Matrix überschrieben). In diesem Fall kommen iterative Methoden zum Einsatz.

Dazu definieren wir jeweils eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einen Vektor $c \in \mathbb{R}^n$ so, dass \bar{x} Fixpunkt der Funktion

$$g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad g(x) := Bx + c$$

ist.

Falls g die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt, so wählen wir $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ beliebig und berechnen Folgenglieder $x^{(k)}$ der zugehörigen Fixpunktfolge. Dabei kontrollieren wir in jedem Schritt die Genauigkeit mit Hilfe der a posteriori- und a priori-Abschätzungen. Sobald die Genauigkeit besser ist als ϵ , akzeptieren wir das aktuelle Folgenglied als Approximation.

Da $Ax = b$ nicht in Fixpunktform $g(x) = x$ gegeben ist, müssen wir es umformen. Wir betrachten einige Beispiele.

Beispiel 6.7 1. Wir lösen die linke Seite nach A auf.

$$Ax = b \iff x = \underbrace{A^{-1}b}_c =: g(x)$$

Das ist zwar korrekt, macht aber keinen Sinn, denn wir müssten A^{-1} ausrechnen, um g zu berechnen. Wenn wir das können, brauchen wir kein iteratives Verfahren.

2. Wir bringen das Ax auf die rechte Seite und addieren auf beiden Seiten ein x .

$$Ax = b \iff x = x + b - Ax = \underbrace{(I - A)x}_{=:B} + \underbrace{b}_{=:c} =: g(x).$$

Das ist ebenfalls korrekt, und im Grunde die Neumannsche Reihe, aber bei praktischen Problemen ist leider dieses g selten kontrahierend, daher nutzt es uns ebenfalls nichts.

Eine Kombination dieser beiden Verfahren führt zum Erfolg. Wir setzen

$$A = L + D + R, \quad L, D, R \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Hierbei enthält L die Einträge unterhalb der Hauptdiagonalen, D die Diagonaleinträge und R die Einträge oberhalb der Hauptdiagonalen. Zur Berechnung von L, D und R muss man natürlich nicht rechnen, dies ist nur eine Aufteilung.

Wir bringen nun einen Teil von Ax auf die rechte Seite und invertieren. Dies führt zu

Definition 6.8 Sei $A = L + D + R$ wie oben, und D sei invertierbar.

1. Es gilt

$$Ax = (L+D+R)x = b \iff Dx = -(L+R)x + b \iff x = \underbrace{-D^{-1}(L+R)x}_{=:B} + \underbrace{D^{-1}b}_{=:c}.$$

Das zugehörige Fixpunktverfahren

$$g(x) := Bx + c = -D^{-1}(L+R)x + D^{-1}b$$

heißt Gesamtschritt- oder Jacobi-Verfahren.

2. Es gilt

$$Ax = (L+D+R)x = b \iff (D+L)x = -Rx + b \iff x = \underbrace{-(D+L)^{-1}Rx}_{=:B} + \underbrace{(D+L)^{-1}b}_{=:c}.$$

Das zugehörige Fixpunktverfahren

$$g(x) := Bx + c = -(D+L)^{-1}Rx + (D+L)^{-1}b$$

heißt Einzelschritt- oder Gauss-Seidel-Verfahren.

Man berechnet natürlich nicht wirklich die Inverse $(D+L)^{-1}$, sondern löst zur Berechnung von $x = (D+L)^{-1}y$ das Gleichungssystem $(D+L)x = y$ durch Vorwärtseinsetzen (wie im Beispiel).

Die historische Idee von Gauss ist: Wähle einen beliebigen Startvektor $x \in \mathbb{R}^n$.

Ändere x_1 so ab, dass die erste Gleichung erfüllt ist.

Ändere dann x_2 so ab, dass die zweite Gleichung erfüllt ist.

usw., wenn man bei x_n angekommen ist, fängt man wieder bei x_1 an.

Man macht sich sofort klar, dass dies äquivalent zum Einzelschrittverfahren ist.

Beispiel 6.9 Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im Gesamtschrittverfahren gilt

$$B = -D^{-1}(L + R) = -\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$c = D^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\|B\|_\infty = \frac{1}{3} =: q < 1$$

und damit ist die Funktion

$$g(x) := Bx + c$$

kontrahierend mit der Kontraktionskonstante q .

Wir wählen $x^{(0)} = 0$, damit gilt $x^{(1)} = c$. Es ist

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = \frac{4}{3} \implies \|x^{(k)} - \bar{x}\|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q} \frac{4}{3} = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

für die a priori-Fehlerabschätzung. Weiter gilt

$$x^{(2)} = Bx^{(1)} + c = \begin{pmatrix} \frac{11}{12} \\ \frac{11}{12} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.92 \\ 0.92 \end{pmatrix}$$

Die a posteriori-Abschätzung liefert hier

$$\|x^{(2)} - \bar{x}\|_\infty \leq \frac{q}{1-q} \|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty = \frac{5}{24}.$$

Für das Einzelschrittverfahren gilt

$$D + L = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wegen $c = (D + L)^{-1}b$ gilt $(D + L)c = b$. Wir berechnen c durch Vorwärtseinsetzen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \implies c_1 = \frac{4}{3}, c_2 = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{4}{3}\right) = \frac{11}{12}.$$

Weiter erhält man

$$q = \frac{1}{3}, x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.03 \\ 0.99 \end{pmatrix}$$

und damit eine deutlich bessere Approximation als beim Gesamtschrittverfahren.

6.3 Infimum der induzierten Matrixnormen

Wir haben gesehen: Es ist wichtig, die richtige Norm zu wählen, damit $\|B\| < 1$ um zu zeigen, dass die Fixpunktfolge konvergiert. Die Frage ist natürlich: Wie klein kann man die induzierte Norm einer Matrix machen? Dies beantwortet der folgende Satz.

Satz 6.10 Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, und $\|\cdot\|$ eine induzierte Matrixnorm. Dann gilt mit dem Spektralradius $\rho(B)$

$$\|B\| \geq \rho(B).$$

Sei weiter $\epsilon > 0$. Dann gibt es eine induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_\epsilon$, so dass

$$\|B\|_\epsilon \leq \rho(B) + \epsilon.$$

Beweis: Sei zunächst λ ein Eigenwert von B zum Eigenvektor y . Dann gilt

$$\|B\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \geq \frac{\|By\|}{\|y\|} = |\lambda|,$$

also $\|B\| \geq |\lambda|$.

Den zweiten Teil zeigen wir nur für den (trivialen) Fall dass B symmetrisch positiv definit ist. Den allgemeinen Beweis finden Sie im Skript Numerische Lineare Algebra auf meiner Lecture Notes-Seite <https://www.uni-muenster.de/AMM/num/Vorlesungen/wuebbeling/>, Satz 5.13, Infimum der induzierten Matrixnormen.

Sei nun B s.p.d. Dann gilt für die induzierte euklidische Norm

$$\|B\|_2^2 = \rho(B^t B) = \rho(B^2) = \rho(B)^2$$

und damit

$$\|B\|_2 = \rho(B) < \rho(B) + \epsilon.$$

□

Korollar 6.11 Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Falls $\rho(B) < 1$, so gibt es eine induzierte Norm, so dass die Funktion

$$g(x) := Bx + c$$

kontrahierend ist. Damit konvergiert die zugehörige Fixpunktfolge für alle Startwerte $x^{(0)}$ und alle c gegen den eindeutigen Fixpunkt.

Falls $\rho(B) \geq 1$, so gibt es Startwerte und c , so dass die Fixpunktfolge nicht gegen $(I - B)^{-1}c$ konvergiert.

Bemerkung: Eigentlich bekommt man die Konvergenz zunächst nur in dieser speziellen Norm, da aber in endlichdimensionalen Räumen alle Normen äquivalent sind, konvergiert die Folge für alle Normen. Dies bedeutet natürlich insbesondere: Die Fixpunktfolgen können konvergieren, obwohl die Funktion g nicht kontrahierend ist. Kontraktion ist hinreichend, aber nicht notwendig.

Beweis: Zu zeigen ist nur noch der zweite Teil des Korollars. Sei λ Eigenwert von B zum Eigenvektor y und $|\lambda| \geq 1$. Wir setzen $c = 0$, dann ist 0 Fixpunkt von g , und es gilt

$$x^{(k)}y = B^k y = \lambda^k y$$

und dies ist wegen $|\lambda| \geq 1$ keine Nullfolge. □

6.4 Satz von Gerschgorin

Der Satz von Gerschgorin liefert eine grobe Abschätzung über die Lage der Eigenwerte einer Matrix.

Satz 6.12 Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Weiter sei

$$r_i := \sum_{k \neq i} |A_{i,k}|$$

und

$$K_i := \{x : |x - A_{i,i}| \leq r_i\}$$

der Kreis um $A_{i,i}$ mit Radius r_i in der komplexen Ebene.

Dann sind alle Eigenwerte von A in der Vereinigung der K_i enthalten.

Falls l der K_i disjunkt sind vom Rest, so sind in der Vereinigung dieser Kreise genau l Eigenwerte enthalten, der Vielfachheit nach gezählt.

Beweis: Sei λ ein Eigenwert von A zum Eigenvektor x mit $\|x\|_\infty = 1$. Dann gibt es ein m mit $|x_m| = 1$, und $|x_k| \leq 1 \forall k$. Dann gilt

$$0 = (A - \lambda I)_m = \sum_k A_{m,k} x_k - \lambda x_m = (A_{m,m} - \lambda) x_m - \sum_{k \neq m} A_{m,k} x_k$$

und damit

$$|A_{m,m} - \lambda| \leq \sum_{k \neq m} |A_{m,k}| |x_k| \leq r_m,$$

also $\lambda \in K_m$.

Zum Beweis des zweiten Teils sei $B_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$(B_t)_{i,k} = \begin{cases} B_{i,k}, & i = k \\ tB_{i,k}, & i \neq k \end{cases}$$

Also ist B_0 eine Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen von B , und $B_1 = B$.

Es gilt der Satz: Die Nullstellen eines Polynoms hängen stetig von den Koeffizienten ab (Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, 1995).

Seien $\lambda_k(t)$ die Nullstellen von B_t . Dann ist λ_k ein stetiger Weg in den komplexen Zahlen. Nach Teil 1 muss dieser ganz in der Vereinigung aller Kreise liegen. Da alle λ_k auf den Diagonalelementen beginnen, können sie die Vereinigung der l disjunkten Kreise nicht verlassen, und der Satz gilt. \square

Beispiel 6.13

1. *Wärmeleitungsmatrix: Es sind K_1 und K_n Kreise um 2 mit Radius 1, alle anderen sind Kreise um 2 mit Radius 2.*
- 2.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

K_1 ist der Kreis um 4 mit Radius 1, K_2 der Kreis um 0 mit Radius 1, K_3 der Kreis um 1 mit Radius 1.

Die Vereinigung von K_2 und K_3 ist disjunkt von K_1 , also liegen in der Vereinigung genau zwei Eigenwerte und in K_1 liegt genau ein Eigenwert, jeweils der arithmetischen Vielfachheit nach gezählt.

6.5 Zeilensummenkriterien

Definition 6.14 (strikte Diagonaldominanz, starkes Zeilensummenkriterium)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Seien

$$r_i = \sum_{i \neq k} |a_{i,k}|$$

die Radien der Gerschgorinkreise und

$$r_i < |a_{i,i}| \forall i \in \{1 \dots n\}.$$

Dann heißt A strikt diagonaldominant, oder auch A erfüllt das starke Zeilensummenkriterium.

Korollar 6.15 Sei A strikt diagonaldominant. Dann ist A invertierbar, Einzel- und Gesamtschrittverfahren konvergieren gegen die Lösung von $Ax = b$.

Beweis: Da $|a_{ii} - 0| > r_i$, ist 0 nicht im i -ten Gerschgorinkreis enthalten, also ist 0 kein Eigenwert von A und damit A invertierbar.

Wir zeigen nur die Konvergenz des GSV. Es ist zu zeigen, dass

$$\rho(B) = \rho(D^{-1}(L + R)) < 1.$$

$B_{i,i} = 0$, also sind alle Gerschgorinkreise Kreise um 0 mit Radius $r_i/|a_{i,i}| < 1$, also sind alle Eigenwerte kleiner als 1. \square

Dieses Kriterium ist nicht für unser Standardbeispiel, die Wärmeleitungsmatrix, anwendbar. Wir definieren daher

Definition 6.16 (schwache Diagonaldominanz, schwaches Zeilensummenkriterium)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Seien wieder $r_i := \sum_k |a_{i,k}|$ die Radien der Gerschgorinkreise. A heißt schwach diagonaldominant, falls:

1. $|a_{i,i}| \geq r_i$
2. $\exists m : |a_{m,m}| > r_m$
3. A ist unzerlegbar, d.h.

$$\forall I \subset \{1 \dots n\}, \emptyset \neq I \neq \{1 \dots n\} \exists i \in I, k \notin I : |a_{i,k}| \neq 0.$$

Unzerlegbarkeit bedeutet, dass man die Matrix nicht in zwei Teile zerlegen kann, die nichts miteinander zu tun haben. Beispiel für eine zerlegbare Matrix wäre

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(wähle $I = \{2\}$). Die Matrix der Wärmeleitung ist unzerlegbar und damit schwach diagonaldominant.

Satz 6.17 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ erfülle das schwache Zeilensummenkriterium 6.16. Dann ist A invertierbar, Gesamt- und Einzelschrittverfahren konvergieren gegen die Lösung von $Ax = b$.

Beweis: Wir zeigen wieder nur das Gesamtschrittverfahren. Sei

$$Ax = \lambda x, \|x\|_\infty = 1.$$

Wir gehen exakt so vor wie beim Beweis zu Gerschgorin und betrachten zwei Fälle.

$|x_m| = 1$: Dann gilt wie bei Gerschgorin

$$|\lambda| = |\lambda x_m| = |(Bx)_m| \leq \frac{1}{|a_{m,m}|} \sum_{k \neq m} |a_{m,k} x_k| \leq \frac{r_m}{|a_{m,m}|} < 1.$$

$|x_m| < 1$: Sei dann i mit $|x_i| = 1$ (mindestens eins gibt es, denn $\|x\|_\infty = 1$). Wie gerade argumentieren wir

$$|\lambda| = |\lambda x_i| = |(Bx)_i| \leq \frac{1}{|a_{i,i}|} \sum_{k \neq i} |a_{i,k} x_k| \underbrace{\leq}_{!!!} \frac{r_i}{|a_{i,i}|} \leq 1.$$

Das ist blöd – für Zeile i haben wir nun $r_i \leq |a_{i,i}|$, und damit $|\lambda| \leq 1$, und das hilft uns nicht, wir brauchen ein $<$.

Wann steht bei !!! ein $<$ -Zeichen? Sicherlich dann, wenn mindestens ein $|x_k| < 1$ ist und das zugehörige $a_{i,k}$ nicht Null ist. Wir setzen nun in Teil 3 von 6.16

$$I = \{i : |x_i| = 1\}.$$

Dann gibt es i, k mit $i \in I, k \notin I$ (also $|x_i| = 1, |x_k| < 1$) mit $a_{i,k} \neq 0$, und der Satz ist bewiesen. \square

Kapitel 7

Das Newton–Verfahren

Sei $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ differenzierbar und nichtlinear. Gesucht sei eine Nullstelle \bar{x} von f .

Das bekannteste Verfahren zur Bestimmung einer Approximation an diese Lösung ist das Newton–Verfahren. Wir betrachten es hier der Einfachheit halber für $n = 1$.

Sei x eine Näherung für die Nullstelle \bar{x} von f . Wir approximieren die Funktion f durch ihre Tangente im Punkt $(x, f(x))$, also

$$y(t) = (t - x)f'(x) + f(x).$$

Die Tangente schneidet die x -Achse im Punkt

$$\tilde{x} = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Falls die Tangente eine gute Approximation für die Funktion ist, so erwarten wir, dass \tilde{x} eine bessere Approximation für \bar{x} ist als x . Dies wird nun iteriert.

Definition 7.1 Sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar, $x^{(0)} \in \mathbb{R}$, und \bar{x} eine Nullstelle von f . Sei

$$g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad x^{(k+1)} = g(x^{(k)}).$$

Falls die Folge $(x^{(k)})$ wohldefiniert ist und gegen \bar{x} konvergiert, so heißt sie Newtonverfahren zur Bestimmung von \bar{x} .

Satz 7.2 Sei alles wie in 7.1. Dann gibt es eine Umgebung D von \bar{x} , so dass das Newtonverfahren für $x^{(0)} \in D$ gegen \bar{x} konvergiert.

Beweis: Zunächst mal ist \bar{x} genau dann Nullstelle von f , wenn \bar{x} Fixpunkt von g ist. Es reicht also, die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes nachzurechnen. Es gilt

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

für $f'(x) \neq 0$.

Sei zunächst $f'(\bar{x}) \neq 0$. Wegen $f(\bar{x}) = 0$ gilt dann $g'(\bar{x}) = 0$.

f' und g' sind stetig. Also gibt es mit dem ϵ - δ -Kriterium ein $\epsilon > 0$ mit

$$|g'(x)| \leq \frac{1}{2} =: q \text{ und } |f'(x)| \geq \frac{|f'(\bar{x})|}{2} =: \mu > 0 \forall x \in [\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon] =: D.$$

Insbesondere ist damit wegen $|f'(x)| \neq 0$ auf D die Folge wohldefiniert. Damit ist schon mal g kontrahierend auf D .

Sei nun $x \in D$, also $|x - \bar{x}| \leq \epsilon$. Dann gilt

$$|g(x) - \bar{x}| = |g(x) - g(\bar{x})| \leq q|x - \bar{x}| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

und damit auch $g(x) \in D$. Also ist g eine Selbstabbildung von D nach D , kontrahierend auf D , D ist abgeschlossen und konvex, und \mathbb{R} ist vollständig. Also konvergiert die Fixpunktfolge $x^{(k)}$ gegen den eindeutigen Fixpunkt \bar{x} von g , und das Newtonverfahren ist konvergent.

Zur Konvergenzgeschwindigkeit: Wir bemerken zunächst

$$0 = f(\bar{x}) = f(x) + f'(x)(\bar{x} - x) + f''(\xi)\frac{1}{2}(\bar{x} - x)^2$$

mit einem ξ zwischen x und \bar{x} , also $\xi \in D$. Wir setzen darin für x das $x^{(k)}$ ein, lösen nach $f(x^{(k)})$ auf und erhalten

$$\begin{aligned} |\bar{x} - x^{(k+1)}| &= \left| \bar{x} - x^{(k)} + \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \right| \\ &= \left| \bar{x} - x^{(k)} + \frac{-f'(x^{(k)})(\bar{x} - x^{(k)}) - f''(\xi)\frac{1}{2}(\bar{x} - x^{(k)})^2}{f'(x^{(k)})} \right| \\ &\leq \frac{1}{\mu} \|f''\|_{\infty} \frac{1}{2} (\bar{x} - x^{(k)})^2, \quad \|f''\|_{\infty} = \sup_{x \in D} |f''(x)|. \end{aligned}$$

Bis auf eine Konstante quadriert sich der Fehler in jedem Schritt, dies nennen wir auch quadratisch konvergent.

Wir wissen bereits, dass die Folge konvergiert. Sei der Abstand $|\bar{x} - x^{(k)}| < 10^{-3}$. Dann erhalten wir in den nächsten Schritten die Genauigkeiten 10^{-6} , 10^{-12} , 10^{-24} (bis auf Konstante). Das Newtonverfahren konvergiert für $f'(\bar{x}) \neq 0$ extrem schnell.

Sei nun $f'(\bar{x}) = 0$. Wir betrachten ohne Einschränkung den Spezialfall $f'(x) \neq 0$ in einer kleinen Umgebung außerhalb von \bar{x} , $f''(\bar{x}) \neq 0$, $f \in C^4$.

In diesem Fall ist g im Punkt \bar{x} zwar nicht definiert, aber stetig fortsetzbar. Mit L'Hospital gilt:

$$\frac{f(x)}{f'(x)} \longrightarrow \frac{f'(x)}{f''(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} 0$$

und damit ist $g(\bar{x}) = \bar{x}$ stetige Fortsetzung von g , und \bar{x} ist wieder Fixpunkt von g . Auch g' ist stetig fortsetzbar und damit Ableitung von g :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \\ &\longrightarrow \frac{f(x)f'''(x) + f'(x)f''(x)}{2f'(x)f''(x)} \\ &\longrightarrow \frac{f(x)f''''(x) + f'(x)f'''(x) + f'(x)f'''(x) + f''(x)f''(x)}{2(f''(x)^2 + f'(x)f'''(x))} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist g auch in diesem Fall kontrahierend und wie oben Selbstabbildung auf einer kleinen Umgebung von \bar{x} . Leider klappt der Quadrat-Trick in diesem Fall nicht, die Konvergenz ist erheblich langsamer. \square

Nochmal: Dieser Satz sagt nicht aus, dass das Newton-Verfahren grundsätzlich konvergiert. Die Fixpunktfunktion g des Newton-Verfahrens ist Selbstabbildung und kontrahierend **in einer kleinen Umgebung D von \bar{x}** . Also muss auch $x^{(0)}$ in dieser Umgebung liegen, damit der Satz anwendbar ist, d.h. der Startwert darf nicht zu weit von der gesuchten Stelle entfernt liegen. Dies heißt auch lokal konvergent (im Gegensatz zu den global konvergenten Einzel- und Gesamtschrittverfahren, wenn sie die Voraussetzungen erfüllen).

Beispiel 7.3 (Verfahren von Heron)

Es sei $f(x) = x^2 - a$, $a > 0$. Gesucht sei die (einzige) positive Nullstelle \bar{x} von f , also $\bar{x} = \sqrt{a}$. Es gilt

$$f'(x) = 2x, \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - a}{2x} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$$

und damit für das Newton-Verfahren

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) = \frac{1}{2} \left(x^{(k)} + \frac{a}{x^{(k)}} \right).$$

Behauptung: Sei $x^{(0)} > 0$. Dann konvergiert das Newton-Verfahren.

1. Mit $x^{(0)} > 0$ sind alle $x^{(k)} > 0$, insbesondere wohldefiniert.

2. $g(x)$ hat ein globales Minimum bei \sqrt{a} für $x > 0$, denn

$$0 = g'(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{\tilde{x}^2} \right) \implies \tilde{x} = \sqrt{a}, \quad g''(\sqrt{a}) = \frac{1}{\sqrt{a}} > 0 \implies g(x) \geq g(\sqrt{a}) = \sqrt{a}.$$

Also ist g Selbstabbildung auf $D := [\sqrt{a}, \infty)$.

3. Sei $x \in D$. Dann gilt

$$|g'(x)| = \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{a}{x^2} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

D ist konvex, damit ist g kontrahierend auf D , und das Newtonverfahren konvergiert für $x^{(0)} \in D$ gegen den einzigen Fixpunkt $\bar{x} = \sqrt{a}$ von g .

Sei nun $0 < x^{(0)} \leq \sqrt{a}$. Dann gilt $x^{(1)} \geq \sqrt{a}$, und die Folge ist wieder konvergent.

Beispiel 7.4 Es sei $f(x) = a - \frac{1}{x}$, $a > 0$. Gesucht sei die einzige positive Nullstelle von f , also $\bar{x} = \frac{1}{a}$. Es gilt

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{a - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = x - ax^2 + x = x(2 - ax).$$

Behauptung: Sei $x^{(0)} \in (0, \frac{1}{a}] =: D$. Dann konvergiert das Newtonverfahren

$$x^{(k+1)} = x^{(k)}(2 - ax^{(k)})$$

gegen $\bar{x} = \frac{1}{a}$. (Bemerkung: Hier können wir den Fixpunktsatz nicht direkt benutzen, denn D ist nicht abgeschlossen!)

1.

$$x \in D \implies 2 - ax \geq 1 \implies g(x) \geq x \implies x^{(k)} \text{ ist monoton steigend.}$$

2.

$$0 = g'(\tilde{x}) = 2(1 - a\tilde{x}) \implies \tilde{x} = \frac{1}{a}, \quad g''(\tilde{x}) = -2a < 0 \implies g(x) \leq \frac{1}{a}.$$

Damit ist die Folge monoton und beschränkt, also konvergent.

3. Es gilt $x^{k+1} = g(x^{(k)})$. Wir betrachten auf beiden Seiten $k \rightarrow \infty$ und erhalten, da g stetig ist,

$$\lim x^{(k)} = g(\lim x^{(k)}).$$

Also ist der Grenzwert Fixpunkt von g , also konvergiert die Folge gegen $\bar{x} = \frac{1}{a}$.

Kapitel 8

Eigenwerte

Bei der Berechnung der 2-Norm einer Matrix und bei der Konvergenz des Gesamt- und Einzelschrittverfahrens tauchte der betragsgrößte Eigenwert einer Matrix auf. Wir betrachten die Potenzmethode, eine Möglichkeit, diesen zu berechnen.

Definition 8.1 (Potenzmethode)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Sei

$$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, x^{(k+1)} = Ax^{(k)}, \text{ also } x^{(k)} = A^k x^{(0)}.$$

Sei weiter

$$d \in \mathbb{R}^n, \alpha^{(k)} = \frac{(x^{(k+1)}, d)}{(x^{(k)}, d)}.$$

Dann heißt $\alpha^{(k)}$ Potenzmethode zur Bestimmung des betragsmaximalen Eigenwerts von A .

Durchführung der Potenzmethode: Zu berechnen sei der betragsmaximale Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1. Wähle einen (beliebigen, von Null verschiedenen) Startvektor $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.
2. Wähle einen (beliebigen, von Null verschiedenen) Vektor $d \in \mathbb{R}^n$.
3. Für $k = 0 \dots$
 - (a) Berechne $x^{(k+1)} = Ax^{(k)}$ (dies ist eine Matrix-Vektor-Multiplikation, benötigt also n^2 Rechenoperationen)
 - (b) Berechne $\alpha^{(k)}$ wie oben, hier ist ein neues Skalarprodukt zu berechnen, dies benötigt n Rechenoperationen und eine Division.

Üblicherweise wählt man für $x^{(0)}$ und d zufällige Vektoren, in Programmen etwa alle Komponenten gleichverteilt in $[0, 1]$.

Natürlich wird man die Berechnung der Folgenglieder abbrechen, sobald die benötigte Genauigkeit erreicht ist, siehe hierzu 8.3 für eine Fehlerabschätzung.

Satz 8.2 (Konvergenz der Potenzmethode)

Sei alles wie in 8.1. Seien λ_k die Eigenwerte von A , der arithmetischen Vielfachheit nach gezählt und nach dem Betrag geordnet, d.h.

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Falls

1. Falls $\lambda_1 = \dots = \lambda_r$ und $|\lambda_r| > |\lambda_{r+1}|$, so konvergiert $\alpha^{(k)}$ gegen λ_1 für fast alle d und $x^{(0)}$. Falls die arithmetische und geometrische Vielfachheit von λ_1 übereinstimmen, so ist die Konvergenz schnell (wie $\left(\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_1}\right)^k$). Andernfalls ist die Konvergenz langsam (wie $\frac{1}{k}$).
2. Falls es ein λ_r gibt mit $|\lambda_1| = |\lambda_r|$, $\lambda_1 \neq \lambda_r$, so konvergiert $\alpha^{(k)}$ für fast alle d , $x^{(0)}$ nicht.

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall, dass A diagonalisierbar ist.

Sei dann x_i eine Basis aus Eigenvektoren von A mit zugehörigen Eigenwerten λ_i . Dann gibt es Koeffizienten μ_i mit

$$x^{(0)} = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \implies x^{(k)} = A^k x^{(0)} = \sum_{i=1}^n \mu_i A^k x_i = \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i^k x_i.$$

Es sei nun die erste Bedingung 1 erfüllt. Dann gilt

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= \sum_{i=1}^r \mu_i \lambda_1^k x_i + \sum_{i=r+1}^n \mu_i \lambda_i^k x_i \\ &= \lambda_1^k \left(\underbrace{\sum_{i=1}^r \mu_i x_i}_{=:y} + \underbrace{\sum_{i=r+1}^n \mu_i \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} x_i}_{\mapsto_{k \rightarrow \infty} 0} \right) \\ & \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{=:r^{(k)}} \end{aligned}$$

Damit konvergiert $r^{(k)}$ gegen y . y ist Linearkombination der Eigenvektoren zum Eigenwert λ_1 . Falls $y \neq 0$, so ist y ebenfalls ein Eigenvektor zu λ_1 . Damit y Null ist, muss gelten $\mu_i = 0$, $i = 1 \dots r$. Dies ist nur für eine Nullmenge im \mathbb{R}^n der Fall, also

ist $y \neq 0$ für fast alle Startwerte $x^{(0)}$.

Weiter gilt

$$\alpha^{(k)} = \frac{(x^{(k+1)}, d)}{(x^{(k)}, d)} = \frac{\lambda_1^{k+1}(r^{(k+1)}, d)}{\lambda_1^k(r^{(k)}, d)} \mapsto \lambda_1 \frac{(y, d)}{(y, d)} = \lambda_1,$$

falls $(y, d) \neq 0$. $(y, d) = 0$ nur für $d \in y^\perp$, also wieder eine Nullmenge.

Die Konvergenzgeschwindigkeit ist gegeben durch die von $r^{(k)}$, also gerade

$$\left(\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_1} \right)^k.$$

Sei nun Bedingung 2 erfüllt, und ohne Einschränkung

$$|\lambda_1| = |\lambda_2|, \lambda_1 \neq \lambda_2, |\lambda_1| > |\lambda_3|.$$

Dann gilt wie oben

$$x^{(k)} = \lambda_1^k \left(\underbrace{\mu_1 x_1}_{=:y} + \underbrace{\mu_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k x_2}_{\text{divergiert}} + \underbrace{\sum_{i=3}^n \mu_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k x_i}_{\mapsto 0} \right).$$

Der erste und dritte Term ist derselbe wie oben. Der zweite Term konvergiert aber nicht wegen $|\lambda_1/\lambda_2| = 1$, $\lambda_1/\lambda_2 \neq 1$, für fast alle $x^{(0)}$, und damit auch nicht das $\alpha^{(k)}$.

Zu zeigen ist noch, was bei nicht diagonalisierbaren Matrizen passiert. Wir betrachten nur den Spezialfall

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:N} = \lambda I + N.$$

Die Matrix hat nur den Eigenwert λ (doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms), aber nur einen Eigenvektor, d.h. hier ist die geometrische Vielfachheit kleiner als die arithmetische.

N ist nilpotent, d.h. $N^2 = 0$. Mit der binomischen Reihe gilt

$$A^k = (\lambda I + N)^k = \lambda^k I + k \lambda^{k-1} N.$$

Alle anderen Summanden fallen weg wegen $N^2 = 0$. Wir setzen wieder an wie oben und erhalten

$$x^{(k)} = A^k x^{(0)} = k \lambda^k \underbrace{\left(\underbrace{\frac{x^{(0)}}{k}}_{\mapsto 0} + \frac{1}{\lambda} N x^{(0)} \right)}_{=:r^{(k)}}$$

(und für diese Matrix ist $Nx^{(0)}$ tatsächlich Eigenvektor). Damit gilt

$$\alpha^{(k)} = \frac{(x^{(k+1)}, d)}{(x^{(k)}, d)} = \underbrace{\frac{k+1}{k}}_{\mapsto 1} \lambda \underbrace{\frac{(r^{(k+1)}, d)}{(r^{(k)}, d)}}_{\mapsto 1} \mapsto \lambda$$

aber beide Terme konvergieren nur wie $\frac{1}{k}$. Dieses Argument lässt sich auf jede Matrix übertragen (ist aber sehr technisch). \square

Um die Potenzmethode tatsächlich anzuwenden, würden wir einige Folgenglieder ausrechnen und stoppen, wenn die Näherung gut genug ist. Dazu brauchen wir einen Satz, der sagt, wie weit unsere Näherung noch von einem Eigenwert entfernt liegt. Wir betrachten dies nur für symmetrische Matrizen.

Satz 8.3 (Fehlerabschätzung für Eigenwerte)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Seien $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ und $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ Näherungen für Eigenwert und Eigenvektor von A .

Sei $d := A\tilde{x} - \tilde{\lambda}\tilde{x}$. Dann gibt es einen Eigenwert λ von A mit

$$|\tilde{\lambda} - \lambda| \leq \frac{\|d\|_2}{\|\tilde{x}\|_2}.$$

Beweis: Sei x_i eine ONB aus Eigenvektoren von A zu Eigenwerten λ_i . Dann gilt

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i, \mu_i = (\tilde{x}, x_i), \|\tilde{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \mu_i^2$$

(nach Beispiel 2 in 3.15). Weiter gilt

$$d = A\tilde{x} - \tilde{\lambda}\tilde{x} = \sum_{i=1}^n (\mu_i A x_i - \tilde{\lambda} \mu_i x_i) = \sum_{i=1}^n \mu_i (\lambda_i - \tilde{\lambda}) x_i$$

und damit

$$\|d\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \mu_i^2 (\lambda_i - \tilde{\lambda})^2 \geq \sum_{i=1}^n \mu_i^2 (\min_j (\lambda_j - \tilde{\lambda})^2) = \|\tilde{x}\|_2^2 \min_j (\lambda_j - \tilde{\lambda})^2.$$

Insgesamt

$$\min_j |\lambda_j - \tilde{\lambda}| \leq \frac{\|d\|_2}{\|\tilde{x}\|_2}$$

und dies war zu zeigen. \square

Mit Hilfe dieses Satzes können wir also abschätzen, wie gut die Approximation, die wir aktuell haben, ist, und geeignet stoppen. Der Satz hat eine zweite interessante Folgerung.

Korollar 8.4 (Kondition des Eigenwertproblems)

Statt A sei nur eine Näherung $\tilde{A} = A + dA$ bekannt, und es seien $A, dA, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Sei $\tilde{\lambda}$ Eigenwert von \tilde{A} . Dann gibt es einen Eigenwert λ von A mit

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| \leq \|dA\|_2.$$

Beweis: Sei \tilde{x} ein zugehöriger Eigenvektor von \tilde{A} . Wir betrachten $\tilde{\lambda}$ und \tilde{x} als Näherungen für Eigenwert und Eigenvektor von A und wenden 8.3 an.

$$\|d\|_2 = \|A\tilde{x} - \tilde{\lambda}\tilde{x}\|_2 = \|(\tilde{A} - dA)\tilde{x} - \tilde{\lambda}\tilde{x}\|_2 = \|dA\tilde{x}\|_2$$

und damit gibt es einen Eigenwert λ von A mit

$$|\tilde{\lambda} - \lambda| \leq \frac{\|dA\tilde{x}\|_2}{\|\tilde{x}\|_2} \leq \|dA\|_2.$$

□

Der Satz sagt also: Wenn wir eine Matrix mit dem Fehler dA stören, verschieben sich die Eigenwerte höchstens um $\|dA\|_2$, insbesondere führen kleine Fehler in der Matrix zu kleinen Fehlern bei der Eigenwertberechnung. Das Eigenwertproblem für symmetrische Matrizen ist gut konditioniert.

Beispiel 8.5

1. Sei A ähnlich zu

$$\begin{pmatrix} -3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann konvergiert die Potenzmethode schnell gegen -3 .

2. Sei A ähnlich zu

$$\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann konvergiert die Potenzmethode schnell gegen 3 .

3. Sei A ähnlich zu

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \\ & 3 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann konvergiert die Potenzmethode langsam gegen 3.

4. Sei A ähnlich zu

$$\begin{pmatrix} 3 & & \\ & -3 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann konvergiert die Potenzmethode nicht.

Im letzten Fall kann man mit Shifts die Konvergenz erzwingen. Wir betrachten statt A die Matrix $\tilde{A} = A + I$. Die Addition verschiebt die Eigenwerte um 1 nach oben, \tilde{A} hat die Eigenwerte 4, -2, 2, und die Potenzmethode konvergiert gegen 4. Wir ziehen die 1 wieder ab und erhalten einen betragsmaximalen Eigenwert, 3.

Manchmal sucht man auch den betragskleinsten Eigenwert. Setze dann hier $\tilde{A} = A^{-1}$. Die Eigenwerte von \tilde{A} sind die Kehrwerte der Eigenwerte von A , insbesondere ist der betragsgrößte Eigenwert von \tilde{A} der Kehrwert des betragskleinsten Eigenwerts von A . Falls \tilde{A} die Bedingung zur Konvergenz erfüllt, so konvergiert die Potenzmethode also gegen den Kehrwert des betragskleinsten Eigenwerts von A .

Korollar 8.6 (Inverse Iteration nach Wieland)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mu \in \mathbb{R}$, und

$$\tilde{A} = (A - \mu I)^{-1}.$$

Die Potenzmethode zu \tilde{A} konvergiere gegen $\tilde{\lambda}$. Dann ist der zu μ nächstgelegene Eigenwert λ gegeben durch

$$\lambda = \frac{1}{\tilde{\lambda}} + \mu.$$

Beweis: Seien λ_k die Eigenwerte von A , dann sind die Eigenwerte von \tilde{A} gegeben durch

$$\frac{1}{\lambda_k - \mu}.$$

□

Kapitel 9

Interpolation

Bei der allgemeinen Interpolationsaufgabe wird eine Funktion f gesucht, die an vorgegebenen Stützstellen vorgegebene Stützwerte annimmt. Also:

Definition 9.1 (*allgemeine Interpolationsaufgabe*)

Gegeben seien paarweise verschiedene Stützstellen x_i und Stützwerte y_i , $i = 0 \dots N$. Bestimme eine Funktion p aus einem Funktionenraum X mit

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0 \dots N.$$

Im Folgenden seien immer die Stützstellen x_i paarweise verschieden.

9.1 Polynominterpolation

Definition 9.2 (Aufgabe der Polynominterpolation, Polynomraum)

Sei $N \geq 0$. Dann ist \mathcal{P}_N der Raum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich N .

Seien x_0, \dots, x_N paarweise verschieden, y_0, \dots, y_N gegeben. Dann ist die Aufgabe der **Polynominterpolation**:

Finde ein $p \in \mathcal{P}_N$ mit $p(x_i) = y_i \forall i = 0 \dots N$.

Damit gilt:

Satz 9.3 Die Aufgabe der Polynominterpolation ist **eindeutig lösbar**.

Beweis:

1. Formel von Lagrange, **Existenz** einer Lösung: Sei

$$w_j(x) := \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N \frac{x - x_k}{x_j - x_k}, \quad j = 0 \dots N.$$

Dann ist $w_j \in \mathcal{P}_N$, und

$$w_j(x_k) = \delta_{j,k} := \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$$

für $j, k = 0 \dots N$ mit dem Kronecker- δ . Sei

$$p(x) := \sum_{j=0}^N y_j w_j(x).$$

Dann ist $p \in \mathcal{P}_N$, und es gilt

$$p(x_k) = \sum_{j=0}^n y_j w_j(x_k) = \sum_{j=0}^n y_j \delta_{j,k} = y_k$$

für alle $k = 0 \dots N$.

2. **Eindeutigkeit** der Lösung: Seien p_1 und p_2 Lösungen der Polynominterpolationsaufgabe. Sei $p = p_1 - p_2$. Dann ist $p \in \mathcal{P}_N$, und es gilt

$$p(x_k) = p_1(x_k) - p_2(x_k) = y_k - y_k = 0$$

für alle $k = 0 \dots N$. Also ist p ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich N mit $N + 1$ Nullstellen, also ist nach dem Fundamentalsatz der Algebra $p = 0$, und damit $p_1 = p_2$.

□

Die Formel von Lagrange sichert die Existenz einer Lösung und gibt sie konstruktiv an. Alternativ kann man die Koeffizienten des Interpolationspolynoms mit Hilfe der Vandermondematrizen bestimmen.

Definition 9.4 (Vandermondematrizen)

Es seien $x_i, i = 0 \dots N$ paarweise verschieden. Die Matrix $V \in \mathbb{C}^{(n+1) \times (n+1)}$, $V_{ik} = (x_i)^k, i, k = 0 \dots N$, heißt Vandermondematrix zu x_0, \dots, x_N .

Also:

$$V(x_0, \dots, x_N) = \begin{pmatrix} x_0^0 & \dots & x_0^N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N^0 & \dots & x_N^N \end{pmatrix}$$

Satz 9.5 (Invertierbarkeit der Vandermondematrizen)

Seien x_0, \dots, x_N paarweise verschiedene Zahlen, y_0, \dots, y_N in \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Sei $p(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$. Sei $y = (y_0, \dots, y_N)^t$, $a = (a_0, \dots, a_N)^t$, $V = V(x_0, \dots, x_N)$ Vandermonde-Matrix zu x_0, \dots, x_N . Dann gilt:

1. p ist genau dann Lösung des Polynominterpolationsproblems, wenn $Va = y$.
2. V ist invertierbar.

Beweis:

1. Es gilt $(Va)_j = p(x_j)$ und $p \in \mathcal{P}_N$.
2. Die Interpolationsaufgabe besitzt eine eindeutige Lösung nach 9.3, also ist V injektiv und surjektiv, also invertierbar.

□

Damit lassen sich die Koeffizienten eines Interpolationspolynoms durch Lösen eines linearen Gleichungssystems der Ordnung $(N + 1)$ bestimmen.

Satz 9.6 (Abschätzung des Interpolationsfehlers)

Sei $f \in C^{(N+1)}([a, b])$, $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$. Seien x_k paarweise verschieden in $[a, b]$, $k = 0 \dots N$, und sei $p \in \mathcal{P}_N$ das zugehörige Interpolationspolynom mit $p(x_k) = f(x_k)$. Dann gilt:

$$\forall \bar{x} \in [a, b] \exists \xi \in [a, b] \text{ mit } f(\bar{x}) - p(\bar{x}) = w(\bar{x}) \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N + 1)!}, \quad w(x) := \prod_{k=0}^N (x - x_k).$$

Insbesondere gilt

$$\forall \bar{x} \in [a, b] : |f(\bar{x}) - p(\bar{x})| \leq |w(\bar{x})| \frac{\|f^{(N+1)}\|_\infty}{(N + 1)!}$$

und

$$\|f - p\|_\infty \leq \|w\|_\infty \frac{\|f^{(N+1)}\|_\infty}{(N + 1)!}$$

mit der Maximumnorm $\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

Beweis:

1. Sei $\bar{x} = x_k$ für ein k . Dann ist $f(\bar{x}) = p(\bar{x})$, $w(\bar{x}) = 0 \Rightarrow$ Behauptung.
2. Sei $\bar{x} \neq x_k$ für alle $k = 0 \dots N$, also $w(\bar{x}) \neq 0$. Wir betrachten den Interpolationsfehler. Dieser hat bereits $(N + 1)$ Nullstellen an den interpolierenden Punkten. Wir modifizieren die Fehlerfunktion nun leicht so, dass sie noch eine zusätzliche Nullstelle bei \bar{x} hat. Sei also

$$F(x) := (f(x) - p(x)) - Kw(x), \quad K = \frac{f(\bar{x}) - p(\bar{x})}{w(\bar{x})}.$$

F hat mindestens die $(N+2)$ verschiedenen Nullstellen \bar{x} und $x_k, k = 0 \dots N$. Nach dem Satz von Rolle hat F' mindestens $(N+1)$ verschiedene Nullstellen, F'' mindestens N Nullstellen und $F^{(N+1)}$ hat mindestens eine Nullstelle ξ im Intervall $[a, b]$. $p \in \mathcal{P}_N$, also verschwindet $p^{(N+1)}$. Der Höchstkoeffizient von $x^{(N+1)}$ in w ist 1, also gilt

$$w^{(N+1)}(x) = (N + 1)!$$

und damit insgesamt

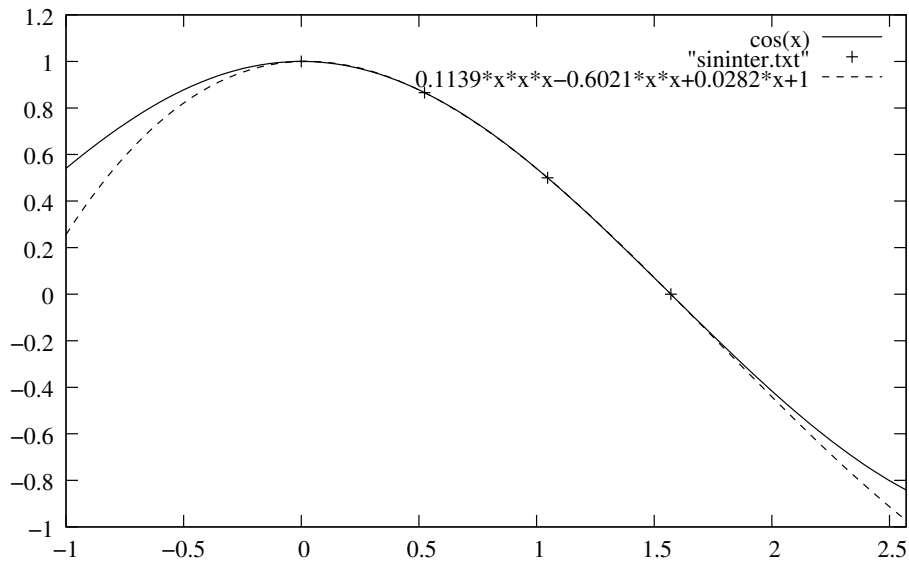
$$0 = F^{(N+1)}(\xi) = f^{(N+1)}(\xi) - K(N + 1)! \Rightarrow K = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N + 1)!}$$

und damit

$$0 = F(\bar{x}) = f(\bar{x}) - p(\bar{x}) - \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N + 1)!}w(\bar{x}).$$

□

Beispiel 9.7 (Interpolation des Cosinus)



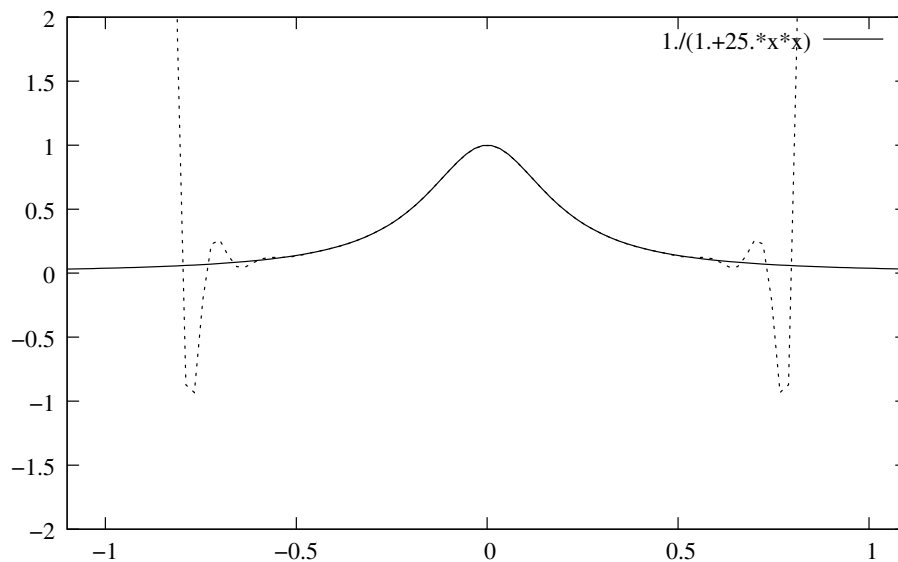
Interpolation des Cosinus auf $[0, \pi/2]$ mit vier Stützpunkten. Die Approximation ist bereits so exakt, dass innerhalb des von den Stützstellen abgedeckten Intervalls kaum ein Unterschied zwischen dem Cosinus und dem Interpolationspolynom vom Grade 3 sichtbar ist. Außerhalb steigt dagegen der Fehler schnell dramatisch an.

Beispiel 9.8 (Runge–Beispiel) Runge and König [1925]

Leider sind die Verhältnisse nicht immer so gut. Von Carl Runge stammt das Beispiel der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

auf dem Intervall $[-1, 1]$: Für steigende Zahl der Stützstellen nimmt der maximale Fehler schnell zu.



Interpolation von $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ auf dem Einheitsintervall mit 30 äquidistanten Stützstellen. Die Approximation in der Nähe der 0 ist gut, am Rand beliebig schlecht.

Im Licht von Satz 9.6 stellt sich die Frage: Falls wir frei sind in der Wahl der Stützstellen, welche Wahl liefert die beste Fehlerabschätzung, also den kleinsten Wert für $\|w\|_\infty$?

Definition 9.9 (Tschebyscheff–Polynome)

$$T_n : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}, T_n(x) := \cos(n \arccos x), n \in \mathbb{N}$$

heißt **Tschebyscheff–Polynom der Ordnung n** .

Satz 9.10 Eigenschaften der Tschebyscheff–Polynome

Für die Tschebyscheff–Polynome T_n gilt:

1. $T_n \in \mathcal{P}_n$.
2. Für $n > 0$ hat $T_n(x)$ den Höchstkoeffizienten 2^{n-1} .
3. Die Nullstellen von T_{n+1} sind

$$x_k^n = \cos\left(\frac{2k + 1}{2(n + 1)}\pi\right), k = 0 \dots n.$$

4. Wählt man für eine Polynominterpolation vom Grad n die Stützstellen $x_k^n, k = 0 \dots n$, so ist

$$w(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k^n) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x).$$

Beweis: Übungen. □

Die Polynominterpolation, bei der wir die Stützstellen $x_0 \dots x_N$ als Nullstellen des Tschebyscheff–Polynoms T_{N+1} wählen, nennen wir **Tschebyscheff–Interpolation**. Wir erhalten für die Tschebyscheff–Interpolation nach 9.10 und 9.6 die Abschätzung

$$\|f - p\|_\infty \leq \frac{\|f^{(N+1)}\|_\infty}{2^N (N + 1)!}.$$

9.2 Splines

Bei der Polynominterpolation gibt es ein riesiges Problem: Falls N groß ist, so können wir die zugehörigen Polynome nicht mehr vernünftig auswerten.

Splines beheben diesen Mangel: Sie teilen zunächst das Intervall $[a, b]$ an Knotenpunkten s_i auf. Auf jedem Einzelintervall $[s_i, s_{i+1}]$ sind die Splines (der Ordnung k) Polynome p_i vom Grad $k - 1$, mit der zusätzlichen Forderung, dass an den Knoten die zusammengesetzte Funktion $(k - 2)$ -mal differenzierbar ist, die Polynome von links und rechts also bis zur $(k - 2)$ -ten Ableitung übereinstimmen.

Definition 9.11 (Splines)

Seien $s_0 < s_1 < \dots < s_n$ reelle Zahlen. Eine Funktion

$$s : [s_0, s_n] \mapsto \mathbb{R}$$

heißt Spline der Ordnung k (zu den Knoten $s_0 \dots s_n$), falls

1. $s \in C^{(k-2)}([s_0, s_n])$ für $k > 1$.
2. $s|_{[s_i, s_{i+1}]} \in \mathcal{P}_{k-1}, i = 0 \dots n - 1$.

Üblicherweise wird der Spline über sein eigentliches Definitionsgebiet hinaus fortgesetzt, z.B. linear oder periodisch.

Beispiel 9.12

Die stückweise konstanten Funktionen sind Splines der Ordnung 1.

Polygonzüge (stückweise lineare stetige Funktionen) sind Splines der Ordnung 2.

Die Splines der Ordnung 4 (kubische Funktionen auf jedem Intervall, die an den Intervallenden zweimal stetig differenzierbar sind) entsprechen der Straklatteninterpolation aus dem Schiffsbau. Ohne Beweis, Sie finden diesen z.B. in meinem Skript zur Numerischen Analysis, Satz 2.48. Im Wesentlichen muss man dazu zweimal partiell integrieren.

Wir notieren, dass in diesem viel simpleren Fall die Konvergenz der Interpolation gegen die gegebene Funktion f (für $n \mapsto \infty$) trivial ist, ganz anders als bei den Polynomen.

Satz 9.13 (Konvergenz von Splines der Ordnung 1)

Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R} \in C^1([a, b])$, und $x_k, k = 0 \dots n$, seien äquidistant verteilt in $[a, b]$, also

$$x_k = a + kh, h = (b - a)/n.$$

Weiter sei

$$s_0 = a, s_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}, k = 1 \dots n, s_{n+1} = b.$$

Es sei $s^{(n)}$ der Spline der Ordnung 1 mit $s^{(n)}(x_k) = f(x_k)$ zu den Knoten s_0, \dots, s_{n+1} . Dann gilt

$$\|s^{(n)} - f\|_\infty = O(h) \mapsto_{n \rightarrow \infty} 0.$$

Beweis: Sei $x \in [a, b]$, und x liege im Intervall $I = [s_k, s_{k+1}]$. I hat höchstens die Länge h . In I liegt genau ein Interpolationspunkt x_j . Nach Definition der Splines der Ordnung 1 gilt $s^{(n)}|_I \in \mathcal{P}_0$, und $s^{(n)}(x_j) = f(x_j)$. Also ist $s^{(n)}$ in diesem Intervall Interpolationspolynom der Ordnung $N = 0$. Mit unserer Formel für den Interpolationsfehler gilt

$$|s^{(n)}(x) - f(x)| \leq \|(f')_I\|_\infty |x - x_j| \leq h \|f'\|_\infty.$$

□

Bemerkung: Für Splines der Ordnung 0 kann man die s_k dem linken oder rechten Intervall zuschlagen, der Beweis bleibt gleich.

Bemerkung: Für Splines der Ordnung 2 (Polygonzüge) gilt sogar (Übungen)

$$\|s^{(n)} - f\|_\infty = O(h^2).$$

Kapitel 10

Anwendungen der Polynominterpolation

Aus dem vergangenen Kapitel nehmen wir mit, dass man sich bei der Polynominterpolation auf Polynome kleinen Grades beschränken sollte. Bei vielen Interpolationen (und hoher erwarteter Genauigkeit) sollte man sich auf kleine Intervalle beschränken.

Bei allen Anwendungen ist die zugrundeliegende Idee: Wenn eine Operation (Integration, Differentiation) nicht direkt möglich ist, berechne das Interpolationspolynom und führe die Operation auf dem Polynom durch.

10.1 Numerische Differentiation

Gegeben seien Funktionsauswertungen $f(x_k)$ einer differenzierbaren Funktion f , $k = 0 \dots N$. Zu berechnen sei daraus eine Approximation an eine Ableitung von f an der Stelle x . Hierzu berechnen wir das Interpolationspolynom und leiten es an der Stelle x ab.

Beispiel 10.1

1. Gegeben seien $f(x)$ und $f(x+h)$. Das Interpolationspolynom $p \in \mathcal{P}_1$ ist

$$p(t) = f(x) + \frac{f(x+h) - f(x)}{h} (t - x).$$

Die Approximation für die erste Ableitung ist

$$p'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =: D_h^+(f)(x)$$

(rechtsseitiger Differenzenquotient).

2. Gegeben seien $f(x-h)$ und $f(x)$. Das Interpolationspolynom $p \in \mathcal{P}_1$ ist

$$p(t) = f(x) + \frac{f(x-h) - f(x)}{h} (x-t).$$

Die Approximation für die erste Ableitung ist

$$p'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} =: D_h^-(f)(x)$$

(linksseitiger Differenzenquotient).

3. Gegeben seien $f(x-h)$ und $f(x+h)$. Das Interpolationspolynom $p \in \mathcal{P}_1$ ist

$$p(t) = f(x+h) + \frac{f(x-h) - f(x+h)}{2h} (x+h-t).$$

Die Approximation für die erste Ableitung ist

$$p'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} =: D_h(f)(x)$$

(zentraler Differenzenquotient).

4. Gegeben seien $f(x-h)$, $f(x)$ und $f(x+h)$. Das Interpolationspolynom $p \in \mathcal{P}_2$ ist (in Lagrange-Form)

$$\begin{aligned} p(t) &= f(x+h) \frac{(t-x)(t-(x-h))}{h(2h)} \\ &+ f(x) \frac{(t-(x-h))(t-(x+h))}{h(-h)} \\ &+ f(x-h) \frac{(t-(x+h))(t-x)}{(-h)(-2h)} \end{aligned}$$

Die Approximation für die zweite Ableitung ist

$$p''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} =: D_h^2(f)(x)$$

(zentraler Differenzenquotient der zweiten Ableitung).

Satz 10.2

1. Sei $f \in C^2([a, b])$. Dann gilt $\forall x \in (a, b)$

$$|f'(x) - D_h^+(f)(x)| = O(h), \quad |f'(x) - D_h^-(f)(x)| = O(h).$$

2. Sei $f \in C^3([a, b])$. Dann gilt $\forall x \in (a, b)$

$$|f'(x) - D_h(f)(x)| = O(h^2).$$

3. Sei $f \in C^4([a, b])$. Dann gilt $\forall x \in (a, b)$

$$|f''(x) - D_h^2(f)(x)| = O(h^2).$$

Beweis: Wir beweisen nur (2), der Rest in den Übungen. Taylorreihe mit Restglied liefert

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_1) \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(\xi_2) \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$D_h f(x) = f'(x) + \frac{h^2}{12}(f'''(\xi_1) - f'''(\xi_2)) = f'(x) + O(h^2).$$

□

10.2 Numerische Integration: Newton–Cotes–Formeln

Aufgabe: Zu berechnen sei das Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

aus den Auswertungen der Funktion f an den Stützstellen $x_k \in [a, b]$. Wir approximieren das Integral durch das Integral des Interpolationspolynoms, sei also

$$p \in \mathcal{P}_N, p(x_k) = f(x_k), k = 0 \dots N \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \sim \int_a^b p(x) dx =: I_N(f).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &\sim \int_a^b p(x) dx \\
 &= \int_a^b \sum_{k=0}^N f(x_k) \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} dx && \text{Lagrange-Form} \\
 &= \sum_{k=0}^N \underbrace{\int_a^b \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} f(x_k) dx}_{=: A_k} \\
 &= \sum_{k=0}^N A_k f(x_k).
 \end{aligned}$$

Wir betrachten den Spezialfall der Newton–Cotes–Formeln. Hier werden die Stützstellen aquidistant verteilt, also

$$x_k = a + kh, \quad h = \frac{b - a}{N}, \quad k = 0 \dots N.$$

Für $N = 1$ gilt $x_0 = a, x_1 = b, h = b - a$ und

$$A_0 = \int_a^b \frac{x - b}{a - b} dx = \frac{1}{a - b} \frac{(a - b)^2}{2} = \frac{b - a}{2} = \frac{h}{2}$$

und $A_0 = A_1$, also

$$\int_a^b f(x) dx \sim I_1(f) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)).$$

Dies ist die *Trapezregel*. Für $N = 2$ erhält man $x_0 = a, x_1 = (a + b)/2, x_2 = b, h = (b - a)/2$ und

$$A_0 = \frac{1}{3}h, \quad A_1 = \frac{4}{3}h, \quad A_2 = \frac{1}{3}h,$$

also

$$\int_a^b f(x) dx \sim I_2(f) = \frac{h}{3} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Diese Formel heißt Simpsonregel oder Keplersche Faßregel.

Satz 10.3 (Fehlerabschätzung für die Numerische Integration)

1. Sei

$$f \in C^{N+1}([a, b]), w(x) := \prod_{j=0}^N (x - x_j).$$

Dann gilt

$$|I_N(f) - \int_a^b f(x) dx| \leq C_N \|f^{(N+1)}\|_\infty$$

mit

$$C_N = \frac{1}{(N+1)!} \int_a^b |w(x)| dx \leq \frac{\|w\|_\infty}{(N+1)!} (b-a) \leq \frac{(b-a)^{N+2}}{(N+1)!} = O(h^{N+2}).$$

2. Sei N gerade, $f \in C^{(N+2)}$, und die Stützstellen seien nach Newton-Cotes gewählt, also

$$x_k = a + kh, h = \frac{b-a}{N}, k = 0 \dots N.$$

Dann gilt sogar

$$|I_N(f) - \int_a^b f(x) dx| \leq \frac{b-a}{2} C_N \|f^{(N+2)}\|_\infty = O(h^{N+3}).$$

Beweis: Sei p das Interpolationspolynom zu f an den Stützstellen x_k , also

$$p \in \mathcal{P}_N, p(x_k) = f(x_k), k = 0 \dots N.$$

Nach Definition von I_N gilt

$$\begin{aligned} |I_N(f) - \int_a^b f(x) dx| &= \left| \int_a^b p(x) - f(x) dx \right| \\ &= \left| \int_a^b f^{(N+1)}(\xi(x)) \frac{w(x)}{(N+1)!} dx \right| \quad \text{Interpolationsfehler} \\ &\leq \underbrace{\int_a^b \frac{|w(x)|}{(N+1)!} dx}_{=: C_N} \|f^{(N+1)}\|_\infty. \end{aligned}$$

Zum zweiten Teil: Da die Stützstellen alle symmetrisch zur Mitte liegen bei Newton-Cotes und N gerade ist, gilt

$$w(a+x) = -w(b-x) \implies \int_a^b w(x) dx = 0.$$

Wir entwickeln das $f^{(N+1)}(\xi(x))$ mit Taylor um die Intervallmitte $(a + b)/2$ und erhalten

$$f^{(N+1)}(\xi(x)) = f^{(N+1)}\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\xi(x) - \frac{a+b}{2}\right) f^{(N+2)}(\mu(x))$$

und damit

$$\left| I_N(f) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \|f^{(N+2)}\|_\infty \frac{b-a}{2} C_N.$$

□

Bemerkung: Eine etwas genauere Rechnung zeigt, dass man die Konstanten noch verbessern kann (Freund and Hoppe [2007], p. 175). Damit erhält man die endgültigen Fehlerformeln

| Fehler | Integrationsformel |
|-------------------------------------|--------------------|
| $\frac{h^3}{12} \ f^{(2)}\ _\infty$ | Trapezregel |
| $\frac{h^5}{90} \ f^{(4)}\ _\infty$ | Simpson-Regel |

Diese Formeln sind für großes N natürlich unbrauchbar, weil dann der Interpolationsfehler schnell wächst. Daher arbeiten wir hier mit einer erweiterten Idee, den zusammengesetzten Formeln.

Dazu teilen wir das Intervall $[a, b]$ in p Teilintervalle gleicher Größe, schreiben das Integral \int_a^b als Summe der Integrale über die Teilintervalle, und verwenden auf den einzelnen Intervallen Newton-Cotes-Formeln kleiner Ordnung.

Für die Simpson-Regel ($N = 2$) erhält man so etwa für drei Teilintervalle und $x_k = a + kh$, $h = \frac{b-a}{Np} = \frac{b-a}{6}$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \int_{x_4}^{x_6} f(x) dx \\ &\sim \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)). \end{aligned}$$

Satz 10.4 (Fehlerabschätzung für zusammengesetzte Formeln)

Sei $f \in C^{(N+1)}$. Das Integral $\int_a^b f(x) dx$ werde als Summe von p Teilintegralen gleicher Länge geschrieben, und auf jedem Intervall werde Newton-Cotes der Ordnung N verwendet. Die Summe liefert eine Approximation $\widetilde{I}_N(f)$. Dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \widetilde{I}_N(f) \right| = O(h^{N+1}).$$

Falls N gerade, $f \in C^{N+2}$ so gilt sogar

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \widetilde{I}_N(f) \right| = O(h^{N+2}).$$

Beweis: Auf jedem Teilintervall I gilt

$$\left| \int_I f(x) dx - I_N(f) \right| \leq ch^{N+2}$$

und damit

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \widetilde{I}_N(f) \right| &\leq \sum_I \left| \int_I f(x) dx - I_N(f) \right| \\ &\leq p c h^{N+2} \\ &= \frac{p(b-a)}{Np} ch^{N+1} \\ &= O(h^{N+1}) \end{aligned}$$

und entsprechend für den zweiten Teil. □

10.3 Richardson–Extrapolation

Zu bestimmen sei der Grenzwert $F(0) := \lim_{h \rightarrow 0} F(h)$ einer Funktion F . Zur Verfügung stehen die Auswertungen der Funktion F an den Stützstellen h_k . Berechne eine Approximation für $F(0)$.

Wir gehen vor wie bei den anderen Anwendungen: Wir approximieren den Wert $F(0)$ durch $p(0)$ mit dem Interpolationspolynom p , also:

$$p \in \mathcal{P}_N, p(h_k) = F(h_k), k = 0 \dots N \implies F(0) \sim p(0).$$

$p(0)$ heißt Richardson–Extrapolation für den Wert $F(0)$.

Wir schauen zunächst auf eine einfache Anwendung, die Berechnung der ersten Ableitung mit dem rechtsseitigen Differenzenquotienten.

Es sei nun $F(h) := D_h^+(f)(x)$. Zusätzlich stehe die Näherung $F(h/2) = D_{h/2}^+(f)(x)$ zur Verfügung. Wir wissen bereits:

$$F(h) = f'(x) + O(h).$$

Mit Lagrange erhalten wir für das Interpolationspolynom p , das F an den Stellen h und $h/2$ interpoliert,

$$p(x) = F(h) \frac{x - h/2}{h - h/2} + F(h/2) \frac{x - h}{h/2 - h}$$

und damit

$$p(0) = -F(h) + 2F(h/2).$$

Wir untersuchen die Genauigkeit dieser Formel mit Taylor. Es gilt

$$F(h) = F(0) + hF'(0) + \frac{h^2}{2}F''(\xi_1), \quad F(h/2) = F(0) + \frac{h}{2}F'(0) + \frac{h^2}{8}F''(\xi_2)$$

und damit

$$p(0) = -F(h) + 2F(h/2) = F(0) + O(h^2)$$

und wir haben die Abschätzung für den Fehler von $O(h)$ auf $O(h^2)$ erhöht.

Eine weitere gängige Anwendung ist das Romberg–Verfahren. Es wendet Richardson an auf die zusammengesetzte Trapezregel. Das sieht zunächst unsinnig aus, wir haben oben gesehen, dass (im einfachsten Fall) das Richardson–Verfahren die Genauigkeit von $O(h)$ auf $O(h^2)$ erhöht, und die zusammengesetzte Trapezregel ist ja schon von der Ordnung h^2 .

Hier hilft ein Trick. Wir setzen $\tilde{h} := h^2$ und

$$F(\tilde{h}) := I_h.$$

I_h ist die zusammengesetzte Trapezregel zur Schrittweite h . Dann gilt:

$$F(\tilde{h}) = I_h = \int_a^b f(x) dx + O(h^2) = \int_a^b f(x) dx + O(\tilde{h}).$$

Richardson würde hier die Genauigkeit von \tilde{h} auf \tilde{h}^2 erhöhen, d.h. auf $O(h^4)$.

Es seien wieder bekannt die Näherungen I_h mit der Trapezregel für die Schrittweite h und $I_{h/2}$ für die Schrittweite $h/2$. Nach Definition von F ist

$$F(h^2) = I_h, \quad F(h^2/4) = I_{h/2}.$$

Diesmal gilt also für das Interpolationspolynom p

$$p(x) = I_h \frac{x - h^2/4}{h^2 - h^2/4} + I_{h/2} \frac{x - h^2}{h^2/4 - h^2}$$

und

$$p(0) = -\frac{1}{3}I_h + \frac{4}{3}I_{h/2}.$$

Kleine Aufgabe: Genaues Hinschauen zeigt – dies ist die Simpson–Regel, und die ist tatsächlich, wie erwartet, von der Ordnung $O(h^4)$.

Kapitel 11

Anfangswertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen

Wir wiederholen zunächst einige Grundbegriffe aus den Vorbemerkungen und der Analysis II.

Definition 11.1 (*Anfangswertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen, AWA*)
Sei

$$f : [a, b] \times G \mapsto \mathbb{R}^n, G \subset \mathbb{R}^n \text{ offen und zusammenhängend, } y_0 \in G.$$

Die Aufgabe: Bestimme

$$y : [a, b] \mapsto G : y'(t) = f(t, y(t)) \forall t \in [a, b], y(a) = y_0$$

heißt Anfangswertproblem.

In Kapitel I haben wir bereits gesehen, dass sich Aufgaben mit höheren Ableitungen in diese Form (mit $n > 1$) zurückführen lassen.

Lemma 11.2 (*Integraldarstellung der Anfangswertaufgabe*)

Sei y stetig. y ist genau dann Lösung der Anfangswertaufgabe 11.1, wenn

$$y(s) = y_0 + \int_a^s f(t, y(t)) dt \forall s \in [a, b].$$

Beweis: Sei y Lösung der Anfangswertaufgabe. Dann gilt

$$y(s) - y(a) = \int_a^s y'(t) dt = \int_a^s f(t, y(t)) dt$$

und die Rückwärtsrichtung durch Einsetzen.

Beispiel 11.3

1. *Skalare lineare Differentialgleichung mit konstantem Koeffizienten*

$$y'(t) = \beta y(t), y(0) = y_0, \beta \in \mathbb{R}.$$

Lösung ist

$$y(s) = y_0 e^{\beta(s-a)}.$$

2. *Allgemeine lineare homogene Differentialgleichung*

$$y'(t) = \beta(t) y(t), y(0) = y_0, \beta \text{ stetig}.$$

Lösung ist

$$y(s) = y_0 e^{\int_a^s \beta(t) dt}.$$

3. *Allgemeine lineare inhomogene Differentialgleichung*

$$y'(t) = \alpha(t) + \beta(t) y(t), y(0) = y_0, \alpha, \beta \text{ stetig}.$$

Lösung in den Übungen mit Variation der Konstanten.

- 4.

$$y'(t) = 1 + y(t)^2, y(0) = 0.$$

Lösung ist $y(s) = \tan(s)$. Insbesondere hat die Aufgabe keine globale Lösung auf ganz \mathbb{R} (denn der Tangens hat einen Pol bei $\frac{\pi}{2}$).

- 5.

$$y'(t) = y(t)^{\frac{1}{3}}, y(0) = 0.$$

Diese Aufgabe hat die Lösungen

$$y_1(t) = 0, y_2(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}.$$

Inbesondere ist die Lösung der Aufgabe nicht eindeutig.

Wir beweisen den Satz von Picard–Lindelöf zur eindeutigen Lösbarkeit von Anfangswertaufgaben in einer einfachen Version. Wir bemerken zunächst:

Lemma 11.4 (*Fixpunkteigenschaft der Lösung von AWA*)

Sei alles wie in 11.1. Es sei $X = C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ der Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ mit Werten im \mathbb{R}^n , versehen mit der Supremumsnorm. Dann ist

X vollständig (Analysis 2).

Weiter sei

$$g : X \mapsto X, g(y)(s) := y_0 + \int_a^s f(t, y(t)) dt.$$

Dann ist $\bar{y} \in X$ genau dann Lösung der AWA, wenn $\bar{y} = g(\bar{y})$, also wenn \bar{y} ein Fixpunkt von g ist.

Beweis: Integraldarstellung der Differentialgleichung. □

Damit ist schon klar, was wir tun müssen, um die eindeutige Lösbarkeit von AWA zu beweisen: Wir müssen zeigen, dass g die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach erfüllt. Wir beginnen mit

Definition 11.5 (Lipschitzstetigkeit)

Es sei $f : D \mapsto X$. f heißt lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L genau dann, wenn

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \forall x, y \in D.$$

Bemerkung:

1. Falls $L < 1$, so ist f kontrahierend.
2. f ist stetig.
3. Falls D konvex und kompakt ist, und f stetig differenzierbar, so ist f lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstanten $L = \|f'\|_\infty$.
4. Die Funktion

$$f(y) = y^2, f : D \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

ist lipschitzstetig, falls D beschränkt ist, ansonsten ist sie nicht lipschitzstetig.

Beweis: Genau wie bei den entsprechenden Bemerkungen zu kontrahierenden Funktionen. □

Satz 11.6 (Picard–Lindelöf)

Es sei alles wie in 11.1, und f sei stetig. Zusätzlich sei f lipschitzstetig im zweiten Argument mit der Lipschitzkonstanten L , d.h.

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\| \forall t \in [a, b], y_1, y_2 \in G.$$

Dann $\exists \epsilon > 0$: Das AWA besitzt eine eindeutige Lösung auf dem Intervall

$$I_\epsilon := [a, a + \epsilon].$$

Beweis: G ist offen, $y_0 \in G$. Also gibt es eine abgeschlossene Kugel B um y_0 mit Radius $\delta > 0$, die ganz in G liegt.

$I \times B$ ist abgeschlossen und beschränkt, f ist stetig, d.h.

$$M := \sup_{t \in [a, b], y \in B} \|f(t, y)\| < \infty.$$

Sei $0 < q < 1$ beliebig, und

$$\epsilon := \min\left(b - a, \frac{q}{L}, \frac{\delta}{M}\right).$$

Dann gilt $I_\epsilon \subset I$.

Sei nun g wie in 11.4 für $X = C^0(I_\epsilon, \mathbb{R}^n)$ mit der Supremumsnorm. Wir rechnen die Bedingungen des Fixpunktsatzes nach.

1. Bereits bemerkt: X ist vollständig.
2. Setze $D := C^0(I_\epsilon, B) \subset X$, D ist also der Raum der stetigen Funktionen auf I_ϵ mit Werten in B .
Sei y_n Folge in D , die gegen $y \in X$ konvergiert. Dann gilt

$$\|y_n(s) - y(s)\| \leq \|y_n - y\|_\infty \mapsto 0,$$

also konvergiert $y_n(s)$ gegen $y(s)$ für alle s . B ist abgeschlossen, $y_n(s) \in B$, also auch $y(s) \in B$, also $y \in D$. Also ist auch D abgeschlossen.

3. Sei $y \in D$, $s \in I_\epsilon$. Nach Definition von g , M , ϵ gilt

$$\begin{aligned} \|g(y)(s) - y_0\| &= \left\| \int_a^s f(t, y(t)) dt \right\| \\ &\leq \int_a^s \|f(t, y(t))\| dt \\ &\leq (s - a) M \leq \epsilon M \leq \delta. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Also gilt $g(y)(s) \in B$, also $g(y) \in D$. Also ist g eine Selbstabbildung von D nach D .

4. Seien $u, v \in D$. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \|g(u) - g(v)\|_\infty &= \sup_{s \in I_\epsilon} \left\| \int_a^s f(t, u(t)) - f(t, v(t)) dt \right\| \\
 &\leq \sup_{s \in I_\epsilon} \int_a^s \|f(t, u(t)) - f(t, v(t))\| dt \\
 &\leq \int_a^{a+\epsilon} L \|u(t) - v(t)\| dt \\
 &\leq \int_a^{a+\epsilon} L \|u - v\|_\infty dt \\
 &\leq \epsilon L \|u - v\|_\infty \leq q \|u - v\|_\infty
 \end{aligned}$$

und damit ist g kontrahierend.

Der Fixpunktsatz von Banach liefert das gewünschte Ergebnis. □

Diesen Satz kann man noch etwas verbessern.

Satz 11.7 (Globaler Satz von Picard-Lindelöf)

Sei alles wie in 11.6, und es gelte

$$M(b - a) \leq \delta.$$

Dann besitzt die AWA eine Lösung auf dem gesamten Intervall $[a, b]$.

Beweis: In meinem Skript zur Numerischen Analysis.

Beweisidee: Wähle eine gewichtete Supremumsnorm auf X . □

Bemerkung: Sei \bar{y} Lösung der AWA aus 11.6. Dann gilt mit den Bezeichnungen dort $\bar{y} = g(\bar{y})$ und nach 11.1

$$\|\bar{y}(s) - y_0\| \leq (s - a)M.$$

Für $n = 1$ bedeutet dies: Der Graph von \bar{y} liegt in einem Dreieck $K_M(a, y_0)$ mit Spitze bei (a, y_0) , begrenzt durch Geraden mit Steigung M bzw. $-M$ mit $s \in [a, b]$. Die AWA besitzt eine Lösung auf $[a, b]$, wenn dieses Dreieck ganz im Definitionsgebiet $[a, b] \times G$ von f enthalten ist (Kegelbedingung).

Wir werden im Folgenden immer (stillschweigend) annehmen, dass dies der Fall ist, und damit die Existenz einer eindeutigen Lösung der AWA auf dem gesamten Intervall $[a, b]$ gesichert ist.

Wir bemerken auch noch: Da G offen ist, können wir y_0 etwas nach oben oder unten verschieben, so dass die Kegelbedingung erfüllt bleibt. Außerdem besitzen alle Anfangswertprobleme $y(a') = y'_0$ mit $(a', y'_0) \in K_M(a, y_0)$ eine eindeutige Lösung auf dem Intervall $[a', b]$, denn $K_M(a', y'_0) \subset K_M(a, y_0)$.

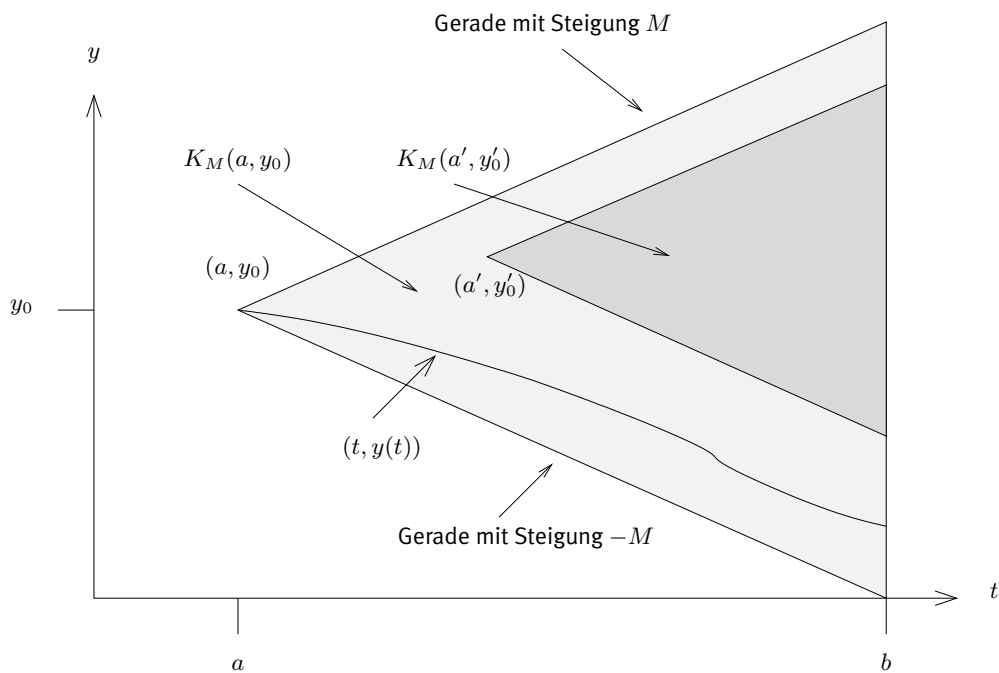


Abbildung 11.1: Kegel $K_M(a, y_0)$

Satz 11.8 (Lemma von Gronwall)

Seien $I = [a, b]$ und

$$\alpha : I \mapsto \mathbb{R}, \beta : I \mapsto \mathbb{R}, u : I \mapsto \mathbb{R}$$

stetig.

1. *Differentielle Form: Falls u differenzierbar ist und*

$$u'(t) \leq \alpha(t) + \beta(t)u(t) \forall t \in I,$$

so gilt

$$u(t) \leq u(a)e^{\int_a^t \beta(s)ds} + \int_a^t \alpha(s)e^{\int_s^t \beta(\xi)d\xi} ds \forall t \in I.$$

2. *Integralform: Falls $\beta \geq 0$ und*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)ds \forall t \in I,$$

so gilt

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(\xi)d\xi} ds \forall t \in I.$$

Beweis:

1. Sei $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R})$, $\psi \in C^0(I, \mathbb{R})$, und

$$\varphi'(t) \leq \psi(t), t \in I.$$

Dann gilt

$$\varphi(t) = \varphi(a) + \int_a^t \varphi'(s) ds \leq \varphi(a) + \int_a^t \psi(s) ds.$$

2. Sei v die Lösung von

$$v'(t) = -\beta(t)v(t), v(a) = 1,$$

also

$$v(t) := e^{-\int_a^t \beta(\xi) d\xi}.$$

Dann gilt, da $v(t) > 0$, mit der Ungleichung aus der differentiellen Form

$$(uv)' = u'v + v'u = u'v - \beta v u \leq \alpha v + \beta u v - \beta v u = \alpha v.$$

Nach 1. gilt damit

$$u(t)v(t) \leq u(a) + \int_a^t \alpha(s)v(s) ds, t \in I.$$

Multiplikation mit $1/v(t)$ liefert Teil 1 des Satzes.

3. Sei nun

$$v(t) := \int_a^t \beta(s)u(s) ds.$$

Mit den Voraussetzungen von Teil 2 gilt dann

$$u(t) \leq \alpha(t) + v(t)$$

und

$$v'(t) = \beta(t)u(t) \leq \beta(t)\alpha(t) + \beta(t)v(t), v(a) = 0.$$

Einsetzen in Teil 1 des Satzes liefert

$$v(t) \leq \int_a^t \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(\xi) d\xi} ds$$

und Teil 2 folgt wegen

$$u(t) \leq \alpha(t) + v(t).$$

□

Korollar 11.9 (Gronwall für konstantes β)

Es seien $\alpha, u : I \mapsto \mathbb{R}$ stetig, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$, und es gelte

$$u(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_a^t u(s) ds \quad \forall t \in I.$$

Dann gilt

$$u(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_a^t \alpha(s) e^{\beta(t-s)} ds.$$

Wir betrachten nun das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(a) = y_0.$$

Statt f stehe nur eine Näherung \tilde{f} zur Verfügung, und statt y_0 nur eine Näherung \tilde{y}_0 . Wir können also nur die Lösung des Anfangswertproblems

$$\tilde{y}'(t) = \tilde{f}(t, \tilde{y}(t)), \quad \tilde{y}(a) = \tilde{y}_0$$

berechnen. Wie groß ist der Fehler, d.h. der Unterschied zwischen y und \tilde{y} ? Dies beantwortet

Satz 11.10 (Stetigkeit des Anfangswertproblems für Anfangswertaufgaben)

Sei

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(a) = y_0$$

ein Anfangswertproblem, das die Voraussetzungen von 11.6 erfüllt, insbesondere sei f Lipschitz-stetig im zweiten Argument mit der Lipschitz-Konstanten L . Statt f und y_0 seien nur Näherungen \tilde{f} und \tilde{y}_0 bekannt mit

$$\|f - \tilde{f}\|_\infty \leq \epsilon, \quad \|y_0 - \tilde{y}_0\| \leq \tilde{\epsilon}.$$

Falls die ungestörte Gleichung und die gestörte Gleichung

$$\tilde{y}'(t) = \tilde{f}(t, \tilde{y}(t)), \quad \tilde{y}(a) = \tilde{y}_0$$

Lösungen y bzw. \tilde{y} im Intervall $[a, b]$ besitzen, so gilt

$$\|\tilde{y}(t) - y(t)\| \leq (\tilde{\epsilon} + \epsilon(t - a)) \exp(L(t - a)) \quad \forall t \in [a, b].$$

Bemerkung: Wir setzen hier die Existenz einer Lösung voraus. Falls das Anfangswertproblem die Kegelbedingung erfüllt, so ist sichergestellt, dass es eine Lösung auf dem gesamten Intervall $[a, b]$ besitzt. Falls ϵ und $\tilde{\epsilon}$ klein genug sind, so erfüllt auch das gestörte Problem die Kegelbedingung und besitzt ebenfalls eine Lösung auf $[a, b]$.

Beweis: Mit $u(t) := \|\tilde{y}(t) - y(t)\|$ gilt mit der Integraldarstellung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \|\tilde{y}_0 - y_0 + \int_a^t \tilde{f}(s, \tilde{y}(s)) - f(s, y(s)) ds\| \\
 &\leq \|\tilde{y}_0 - y_0\| + \int_a^t (\|\tilde{f}(s, \tilde{y}(s)) - f(s, \tilde{y}(s)) + f(s, \tilde{y}(s)) - f(s, y(s))\|) ds \\
 &\leq \|\tilde{y}_0 - y_0\| + \int_a^t (\|\tilde{f}(s, \tilde{y}(s)) - f(s, \tilde{y}(s))\| + \|f(s, \tilde{y}(s)) - f(s, y(s))\|) ds \\
 &\leq \tilde{\epsilon} + \int_a^t (\epsilon + L\|\tilde{y}(s) - y(s)\|) ds \\
 &\leq \underbrace{\tilde{\epsilon} + \epsilon(t - a)}_{\alpha(t)} + \underbrace{L}_{\beta} \int_a^t u(s) ds.
 \end{aligned}$$

Anwendung von 11.9 liefert das Gewünschte:

$$\begin{aligned}
 u(t) &\leq (\tilde{\epsilon} + \epsilon(t - a)) + L \int_a^t \underbrace{(\tilde{\epsilon} + \epsilon(s - a))}_{\leq \tilde{\epsilon} + \epsilon(t - a)} \exp(L(t - s)) ds \\
 &\leq (\tilde{\epsilon} + \epsilon(t - a))(1 - [\exp(L(t - s))]_a^t) \\
 &= (\tilde{\epsilon} + \epsilon(t - a)) \exp(L(t - a)).
 \end{aligned}$$

□

Kapitel 12

Diskrete Lösung von Anfangswertaufgaben

In den folgenden Kapiteln betrachten wir Anfangswertaufgaben der Form:

Definition 12.1 (*Allgemeine Anfangswertaufgabe*)

Gesucht sei eine Funktion $y : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ mit

$$y'(t) = f(t, y(t)), y(a) = y_0.$$

Hierbei seien stets die Voraussetzungen des globalen Satzes von Picard–Lindelöf erfüllt, d.h. f stetig, f lipschitzstetig im 2. Argument mit Lipschitzkonstante L , und die Kegelbedingung sei erfüllt, d.h. der Kegel K_M liege ganz im Definitionsgebiet von f .

Daher ist die Lösung eindeutig bestimmt, und jede Anfangswertaufgabe zu dieser Differentialgleichung mit Anfangswerten im Kegel besitzt eine eindeutige Lösung. Wir werden daher im Folgenden die Lösbarkeit nicht genauer betrachten, dies ist immer bereits durch die starken Voraussetzungen gesichert.

Ein numerisches Verfahren bestimmt Näherungen an die Lösung der Differentialgleichung auf einer Teilmenge I_h von $[a, b]$.

Definition 12.2 *Es sei*

$$I_h = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_{N-1}, t_N = b\}$$

mit $t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N$. Dann heißt I_h (zulässiges) Gitter auf dem Intervall $[a, b]$.

$$h = \max_k t_{k+1} - t_k$$

heißt *Feinheit des Gitters*.

Im Folgenden werden wir zunächst immer annehmen, dass die t_k äquidistant verteilt sind auf dem Intervall $[a, b]$, also $t_k = a + kh$ mit $h = (b - a)/N$. Weiter setzen wir zur Motivation $n = 1$.

Es sei \bar{y} die Lösung unserer Anfangswertaufgabe. Wir wollen eine Funktion

$$y_h : I_h \mapsto \mathbb{R}^n$$

bestimmen mit

$$y_k := y_h(t_k) \sim \bar{y}(t_k).$$

In 1.2 haben wir bereits das Eulersche Polygonzugverfahren graphisch motiviert und erhalten die rekursive Definition

$$y_{k+1} := y_k + hf(t_k, y_k).$$

Wir wollen diese Formel noch dreimal analytisch motivieren. Diese drei Zugänge werden später zu unterschiedlichen numerischen Verfahren führen.

Taylorentwicklung: Es gilt

$$\begin{aligned} \bar{y}(t_{k+1}) &= \bar{y}(t_k + h) \\ &\sim \bar{y}(t_k) + h\bar{y}'(t_k) \\ &= \bar{y}(t_k) + hf(t_k, \bar{y}(t_k)) \end{aligned}$$

Also

$$y_{k+1} = y_h(t_{k+1}) \sim \bar{y}(t_{k+1}) \sim \bar{y}(t_k) + hf(t_k, \bar{y}(t_k)) \sim y_k + hf(t_k, y_k).$$

Numerische Differentiation: Wir wenden auf die Differentialgleichung den Vorwärts-Differenzenquotienten D_h^+ an und erhalten

$$\frac{\bar{y}(t_k + h) - \bar{y}(t_k)}{h} \sim f(t_k, \bar{y}(t_k))$$

Einsetzen von $\bar{y}(t_k) \sim y_k$ und $\bar{y}(t_k + h) \sim y_{k+1}$ liefert wieder das Gewünschte.

Numerische Integration: In der Integraldarstellung der Differentialgleichung gilt

$$\bar{y}(t_{k+1}) = \bar{y}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, \bar{y}(t)) dt \quad (12.1)$$

Wir verwenden den einzigen Stützpunkt $t = t_k$ für die numerische Integration und erhalten

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, \bar{y}(t)) dt \sim hf(t_k, \bar{y}(t_k)) \sim hf(t_k, y_k).$$

Dies ist natürlich alles reine Motivation, wir müssen beweisen, dass diese Ideen gute Approximationen liefern.

Definition 12.3 (globaler Diskretisierungsfehler)

Sei y_h diskrete Näherung für die Lösung \bar{y} der Anfangswertaufgabe 12.1 auf dem Gitter I_h . Dann heißt

$$e_h : I_h \mapsto \mathbb{R}^n, e_h := \bar{y}|_{I_h} - y_h$$

die Fehlerfunktion der Näherung.

$$\|e_h\|_\infty = \max_{t \in I_h} \|e_h(t)\|$$

heißt globaler Diskretisierungsfehler.

Der globale Diskretisierungsfehler ist das Maximum des Unterschieds von y und y_h auf dem Gitter. Es liegt nahe, zu definieren: Ein Verfahren ist konvergent, wenn diese Differenz gegen 0 geht, wenn man die Feinheit der Gitter immer kleiner wählt.

Definition 12.4 (Konvergenz von numerischen Verfahren)

Gegeben sei eine Folge von Gittern I_{h_k} , deren Feinheit h_k gegen 0 geht, und ein numerisches Verfahren für 12.1, das einem Gitter I_h die Näherung y_h zuordnet. Das Verfahren heißt konvergent, falls der globale Diskretisierungsfehler von y_{h_k} gegen 0 geht, also

$$\|e_{h_k}\|_\infty \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0.$$

Das Verfahren heißt konvergent von der Ordnung p , falls

$$\|e_h\|_\infty = O(h^p).$$

Hierbei bedeutet eine hohe Ordnung (ein großes p) wieder, dass der Fehler schnell mit h gegen 0 geht.

Wir wollen nun zunächst numerische Verfahren klassifizieren. Wir betrachten alle Verfahren in der an das Euler-Verfahren angelehnten Form

$$y_{k+1} = y_k + h\varphi \tag{12.2}$$

Hierbei ist φ ein Ausdruck, in dem Auswertungen der Funktion f , die Gitterpunkte t_k , die Näherungen y_k , und h vorkommen, und heißt Verfahrensfunktion. Für das Eulerverfahren etwa gilt

$$\varphi = f(t_k, y_k).$$

Definition 12.5 *Klassifizierung von Numerischen Verfahren*

Ein Verfahren sei gegeben in der Form 12.2. Dann heißt das Verfahren

Explizites Einschrittverfahren falls

$$y_{k+1} = y_k + h\varphi(t_k, y_k, h).$$

In diesem Fall wird nur der letzte berechnete Wert genutzt, um den nächsten auszurechnen.

Implizites Einschrittverfahren falls

$$y_{k+1} = y_k + h\varphi(t_k, y_k, y_{k+1}, h).$$

In diesem Fall muss in jedem Schritt eine Gleichung gelöst werden.

Explizites Mehrschrittverfahren falls

$$y_{k+1} = y_k + h\varphi(t_{k-r}, \dots, t_k, y_{k-r}, \dots, y_k, h).$$

In diesem Fall werden die letzten $r + 1$ Näherungen genutzt, um die nächste auszurechnen.

Implizites Mehrschrittverfahren falls

$$y_{k+1} = y_k + h\varphi(t_{k-r}, \dots, t_k, y_{k-r}, \dots, y_k, y_{k+1}, h).$$

In diesem Fall werden die letzten $r + 1$ Näherungen genutzt, um die nächste auszurechnen, und es muss in jedem Schritt eine Gleichung gelöst werden.

Wir behandeln zunächst nur die expliziten Einschrittverfahren. Unser numerisches Verfahren definiert also ein φ , und es gilt

$$\underbrace{y_{k+1}}_{\sim y(t_{k+1})} = \underbrace{y_k}_{\sim y(t_k)} + h\varphi(t_k, \underbrace{y_k}_{\sim y(t_k)}, h).$$

Dies macht schon klar, wie wir das φ wählen sollten, nämlich

$$\varphi(t_k, y(t_k), h) \sim \frac{y(t_k + h) - y(t_k)}{h}.$$

Den Unterschied dieser beiden Terme bezeichnen wir als Konsistenzfehler.

Definition 12.6 *(Konsistenz von expliziten Einschrittverfahren)*

Sei φ die Verfahrensfunktion eines expliziten Einschrittverfahrens. Sei y (irgend-) eine Lösung der Differentialgleichung mit Graph im Kegel K_M .

$$\tau_h(t, y(t)) := \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \varphi(t, y(t), h)$$

heißt Konsistenzfehler oder lokaler Diskretisierungsfehler. Das Verfahren heißt konsistent, falls

$$\sup_{y,t} |\tau_h(t, y(t))| = \|\tau_h\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Das Verfahren heißt konsistent von der Ordnung p , falls

$$\sup_{y,t} |\tau_h(t, y(t))| = \|\tau_h\|_\infty = O(h^p).$$

Schreibt man den Konsistenzfehler als

$$\tau_h(t, y(t)) := \frac{1}{h}(y(t+h) - (y(t) + h\varphi(t, y(t), h))),$$

so sieht man: Der Konsistenzfehler ist der Unterschied zwischen der Lösung $y(t+h)$ und der durch das diskrete Verfahren vorhergesagten Näherung, wenn man in das diskrete Verfahren die Lösung $y(t)$ einsetzt, und ist damit der Fehler, der lokal an der Stelle t entsteht.

Zum Nachweis der Konsistenz eines Verfahrens ist das folgende Lemma nützlich.

Lemma 12.7 Sei f stetig differenzierbar. Dann $\exists C \in \mathbb{R}$ so dass

$$\|y''\|_\infty \leq C$$

für alle Lösungen y der Differentialgleichung, deren Graph im Kegel K_M liegt. Insbesondere ist y zweimal stetig differenzierbar.

Beweis: Es gilt

$$y'(t) = f(t, y(t)) \implies y''(t) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t))f(t, y(t)).$$

(Hierbei sei immer f_t die Ableitung von f nach der ersten Variablen usw.)

Also

$$\|y''\|_\infty \leq \|f_t\|_\infty + \|f_y\|_\infty \|f\|_\infty =: C.$$

Es gilt $C < \infty$, denn $(t, y(t))$ liegt in der kompakten Menge K_M und alle Funktionen sind stetig. □

Korollar 12.8 Es sei f r -mal stetig differenzierbar. Dann $\exists C \in \mathbb{R}$ so dass

$$\|y^{(r+1)}\|_\infty \leq C$$

für alle Lösungen y der Differentialgleichung, deren Graph im Kegel K_M liegt. Insbesondere ist y $(r+1)$ -mal stetig differenzierbar.

Beispiel 12.9 (Beispiele für explizite Einschrittverfahren und Konsistenz)
 Sei im Folgenden immer y irgendeine Lösung der Differentialgleichung.

1. Eulersches Polygonzugverfahren:

Das Eulersche Polygonzugverfahren ist ein explizites Einschrittverfahren mit der Verfahrensfunktion $\varphi(t_k, y_k, h) = f(t_k, y_k)$, also

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k).$$

Sei f stetig differenzierbar. Dann ist nach 12.7 y zweimal stetig differenzierbar auf I . Es gilt mit Taylorentwicklung und der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \tau_h(t, y(t)) &= \frac{1}{h}(y(t+h) - (y(t) + h\varphi(t, y(t), h))) \\ &= \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - f(t, y(t)) \\ &= \frac{y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(\xi(h)) - y(t)}{h} - y'(t) \\ &= \frac{h}{2}y''(\xi(h)) \\ &\leq \frac{\|y''\|_\infty}{2}h = O(h). \end{aligned}$$

Das Eulerverfahren ist also konsistent, und zwar von der Ordnung 1. Das Eulerverfahren benötigt eine Auswertung von f in jedem Schritt. Bei der Abschätzung der zweiten Ableitung haben wir natürlich das Lemma 12.7 benutzt.

2. Verbessertes Eulerverfahren:

Ein verbessertes Verfahren ergibt sich, wenn wir zur Approximation des Integrals in 12.1 die Mittelpunkregel anwenden und Taylorentwicklung nutzen:

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_k+h} f(t, y(t))dt &\sim h(f(t_k + h/2, y(t_k + h/2))) \\ &\sim h(f(t_k + \frac{h}{2}, y(t_k) + \frac{h}{2}y'(t_k))) \\ &= h(f(t_k + \frac{h}{2}, y(t_k) + \frac{h}{2}f(t_k, y(t_k)))). \end{aligned}$$

Als Verfahrensfunktion wählen wir also

$$\varphi(t_k, y_k, h) = f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}f(t_k, y_k)).$$

Die Konsistenzordnung weisen wir wieder durch Taylorentwicklung nach. Wir benötigen diesmal, dass f zweimal stetig differenzierbar ist. Damit existiert nach 12.8 die dritte Ableitung von y auf I . Zusätzlich beachten wir wieder, dass

$$y''(t) = (f_t + f f_y)(t, y(t)).$$

Mit ein- bzw. zweidimensionaler Taylorentwicklung gilt

$$\begin{aligned} \tau_h(t, y(t)) &= \frac{1}{h}(y(t+h) - (y(t) + h\varphi(t, y(t), h))) \\ &= \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - f\left(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{h}{2}f(t, y(t))\right) \\ &= \frac{y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(t) + \frac{h^3}{6}y'''(\xi(h)) - y(t)}{h} - \\ &\quad \left(f(t, y(t)) + \frac{h}{2}f_t(t, y(t)) + \frac{h}{2}f(t, y(t))f_y(t, y(t)) + O(h^2)\right) \\ &= O(h^2). \end{aligned}$$

Das Verfahren ist konsistent von zweiter Ordnung und benötigt zwei Auswertungen von f pro Schritt.

3. Verfahren von Heun:

Wir können auch mit der Trapezregel integrieren, hierdurch ergibt sich das Verfahren von Heun. Wir nehmen an, dass f zweimal stetig differenzierbar ist.

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt &\sim \frac{h}{2}(f(t_k, y(t_k)) + f(t_k + h, y(t_k + h))) \\ &\sim \frac{h}{2}(f(t_k, y(t_k)) + f(t_k + h, y(t_k) + hf(t_k, y(t_k)))). \end{aligned}$$

Die Verfahrensfunktion ist

$$\varphi(t, y, h) = \frac{1}{2}(f(t, y) + f(t + h, y + hf(t, y))).$$

Wieder gilt mit Taylorentwicklung (für f in zwei Dimensionen)

$$\begin{aligned} \tau_h(t, y(t)) &= \underbrace{\frac{y(t+h) - y(t)}{h}}_{y' + \frac{h}{2}y'' + O(h^2)} - \frac{1}{2} \underbrace{(f(t, y(t)) + f(t+h, y(t) + hf(t, y(t))))}_{y' + (y' + h(f_t + f f_y)) + O(h^2) = 2y' + hy'' + O(h^2)} \\ &= O(h^2). \end{aligned}$$

Das Verfahren ist also ebenfalls konsistent von der Ordnung 2 und benötigt ebenfalls zwei Auswertungen von f pro Schritt.

Natürlich ist noch völlig unklar, warum wir die Konsistenz überhaupt betrachten. Uns interessiert eigentlich die Genauigkeit unserer Abschätzung, und das ist der globale Diskretisierungsfehler. Der folgende Satz klärt das.

Lemma 12.10 (Diskretes Lemma von Gronwall)

Seien (α_k) , (β_k) , (e_k) reelle nichtnegative Folgen und

$$e_{k+1} \leq \alpha_k + (1 + \beta_k)e_k, \quad k \geq 0.$$

Dann gilt

$$e_k \leq (e_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j) \exp\left(\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j\right).$$

Beweis: Durch vollständige Induktion (Übungen). □

Satz 12.11 (Konvergenz von expliziten Einschrittverfahren)

Ein explizites numerisches Einschrittverfahren zur Lösung der Anfangswertaufgabe 12.1 mit Verfahrensfunktion φ sei lipschitzstetig in der zweiten Variable y mit Lipschitzkonstanten L' und konsistent (von der Ordnung p). Dann ist das Verfahren auch konvergent (von der Ordnung p).

Bemerkung: φ enthält in allen unseren Beispielen nur Auswertungen von f . Die Lipschitzstetigkeit von φ folgt daher sofort aus der Lipschitzstetigkeit von f , mit derselben Lipschitzkonstanten L .

Beweis: Sei \bar{y} die Lösung der Anfangswertaufgabe 12.1. Sei $I_h = (t_k)$ das äquidistante Gitter mit Feinheit h mit zugehöriger numerischer Approximation y_h . Wir setzen zunächst

$$e_k := \|\bar{y}(t_k) - y_k\|$$

(globaler Diskretisierungsfehler an der Stelle t_k).

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= \|\bar{y}(t_{k+1}) - y_{k+1}\| \\ &= \|\bar{y}(t_{k+1}) - (y_k + h\varphi(t_k, y_k, h))\| \\ &= \|\bar{y}(t_{k+1}) - (\bar{y}(t_k) + h\varphi(t_k, \bar{y}(t_k), h)) + \bar{y}(t_k) - y_k \\ &\quad + h(\varphi(t_k, \bar{y}(t_k), h) - \varphi(t_k, y_k, h))\| \\ &\leq h|\tau_h(t_k, \bar{y}(t_k))| + e_k + hL'\|\bar{y}(t_k) - y_k\| \\ &= \underbrace{h|\tau_h(t_k, \bar{y}(t_k))|}_{\alpha_k} + \underbrace{(1 + hL')}_{\beta_k} e_k. \end{aligned}$$

Mit dem diskreten Lemma von Gronwall gilt also

$$\begin{aligned}
 e_k &\leq \left(\|e_h(t_0)\| + \sum_{j=0}^{k-1} h |\tau_h(t_j, \bar{y}(t_j))| \right) \exp\left(L' \sum_{j=0}^{k-1} h\right) \\
 &\leq (e_0 + (t_k - a) \max_j |\tau_h(t_j, \bar{y}(t_j))|) \exp(L'(t_k - a)) \\
 &\leq (e_0 + (b - a) \|\tau_h\|_\infty) \exp(L'(b - a)) \\
 &\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.
 \end{aligned}$$

Die Schranke hängt nicht von t_k ab, die Konvergenz ist gleichmäßig, also konvergiert die Supremumsnorm des globalen Diskretisierungsfehlers gegen 0.

Falls ein Verfahren konsistent ist (von der Ordnung p), so ist es auch konvergent (von der Ordnung p). Wir dürfen sogar noch zulassen, dass die Anfangswerte falsch sind (bis auf einen Fehler $O(h^p)$). \square

Dies lässt sich (für lipschitzstetige Verfahrensfunktionen) in dem Merksatz zusammenfassen:

Für Einschrittverfahren gilt: Aus Konsistenz folgt Konvergenz.

Korollar 12.12 (Konvergenz der Referenzverfahren)

Das Eulerverfahren ist konvergent von der Ordnung 1. Das Verfahren von Heun und das verbesserte Eulerverfahren sind konvergent von der Ordnung 2.

Kapitel 13

Konvergenz und Konsistenz für implizite Einschrittverfahren

Wir werden sehen, dass implizite Verfahren nützlich sind. Es stellt sich aber die Frage, ob implizite Verfahren überhaupt wohldefiniert sind (d.h. ob die Gleichungen, die sie definieren, eindeutige Lösungen haben), und ob die so entstehenden Verfahren konvergent sind.

Satz 13.1 (Wohldefiniiertheit für implizite Einschrittverfahren)

Sei $\varphi(t_k, y_k, y_{k+1}, h)$ die Schrittfunktion eines impliziten Einschrittverfahrens zur Lösung von 12.1. Sei φ stetig, und lipschitzstetig bzgl. y_k und y_{k+1} mit der Lipschitzkonstanten L' . Dann gibt es ein h_0 , so dass die Gleichung

$$y_{k+1} = y_k + h\varphi(t_k, y_k, y_{k+1}, h)$$

für $h \leq h_0$ für alle t_k und y_k lokal (in einer kleinen Umgebung von y_k) eindeutig nach y_{k+1} auflösbar ist (d.h. das Verfahren ist überhaupt durchführbar). Es gibt also eine Funktion $v(t_k, y_k, h)$, so dass

$$y_{k+1} = v(t_k, y_k, h).$$

Insbesondere lassen sich implizite Einschrittverfahren als explizite Verfahren der Form

$$y_{k+1} = y_k + h\varphi(t_k, y_k, v(t_k, y_k, h), h)$$

formulieren. Implizite Verfahren sind spezielle explizite Verfahren.

Beweis: Wir zeigen, dass die rechte Seite bei der Definition der impliziten Verfahren eine Selbstabbildung und kontrahierend ist, dann folgt die Wohldefiniiertheit aus

dem Banachschen Fixpunktsatz.

Sei δ so klein, dass für alle Punkte aus dem Kegel K_M auch die δ -Umgebung dieser Punkte noch im Definitionsgebiet von f und damit φ liegt (siehe die Bemerkung zu 11.6). Sei K die Vereinigung aller dieser Umgebungen. K ist kompakt, f ist stetig, also gilt

$$M' = \max_{(t,y),(t,y_1) \in K} \varphi(t, y, y_1, h) < \infty.$$

Sei nun h so klein, dass

$$q := L'h_0 < \frac{1}{2} \text{ und } M'h_0 \leq \frac{\delta}{2},$$

Seien t_k und y_k fest. Wir setzen

$$g : [y_k - \delta, y_k + \delta] \mapsto [y_k - \delta, y_k + \delta], \quad g(z) := y_k + h\varphi(t_k, y_k, z, h).$$

Der Grundraum \mathbb{R} ist Banachraum, das Intervall, auf dem g definiert ist, ist abgeschlossen. Zu zeigen für den Fixpunktsatz von Banach ist noch: g ist wohldefiniert (Selbstabbildung) und kontrahierend. Sei $z \in [y_k - \delta, y_k + \delta]$.

$$\begin{aligned} |g(z) - y_k| &= |h\varphi(t_k, y_k, z, h)| \\ &\leq M'h_0 \leq \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

und damit $g(z) \in [y_k - \delta, y_k + \delta]$. Weiter gilt für $z, z' \in [y_k - \delta, y_k + \delta]$ mit der Lipschitzkonstanten L'

$$\begin{aligned} |g(z) - g(z')| &= |h(\varphi(t_k, y_k, z, h) - \varphi(t_k, y_k, z', h))| \\ &\leq h_0 L' |z - z'| \leq q |z - z'|. \end{aligned}$$

Also ist g auch kontrahierend und besitzt mit dem Banachschen Fixpunktsatz 6.2 einen eindeutigen Fixpunkt

$$y_{k+1} = v(t_k, y_k, h).$$

Die Fixpunktiteration für g konvergiert insbesondere für den Startwert y_k gegen y_{k+1} .

□

Implizite Einschrittverfahren sind also explizite Verfahren, nur etwas anders aufgeschrieben. Insbesondere gilt der Konvergenzsatz auch für implizite Verfahren:

Korollar 13.2 (Konvergenzsatz für implizite Einschrittverfahren)

Implizite konsistente Einschrittverfahren (von der Ordnung p) sind konvergent (von der Ordnung p).

Beweis: Implizite sind spezielle explizite Verfahren, das zugehörige φ ist lipschitzstetig (hier ohne Beweis, siehe Skript zur NumAna), also folgt alles mit 12.11 und 13.1. \square

Beispiel 13.3 (Beispiele für implizite Verfahren)

1. Implizites Eulerverfahren:

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$$

Wir berechnen die Konsistenzordnung. Sei zunächst f differenzierbar. Sei y irgendeine Lösung der Differentialgleichung. Wir setzen wie bei den expliziten Verfahren

$$y_k = y_h(t_k) = y(t_k), y_{k+1} = y_h(t_{k+1}) = y_h(t_k + h) = y(t_k + h), t_k = t$$

in die Definition des Verfahrens ein, berechnen die Differenz der linken und rechten Seite und teilen durch h .

$$\begin{aligned} \tau_h(t, y(t)) &= \frac{1}{h}(y(t+h) - (y(t) + hf(t+h, y(t+h)))) \\ &= \frac{1}{h}(hy'(t) + O(h^2) - hy'(t+h)) \\ &= y'(t) - y'(t) + O(h) \end{aligned}$$

und damit ist das Verfahren konsistent von der Ordnung 1, also auch konvergent von der Ordnung 1.

2. Implizite Trapezregel:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})).$$

Sei f zweimal stetig differenzierbar.

$$\begin{aligned} \tau_h(t, y(t)) &= \frac{1}{h}(y(t+h) - (y(t) + \frac{h}{2}(f(t, y(t)) + f(t+h, y(t+h)))) \\ &= y'(t) + \frac{h}{2}y''(t) + O(h^2) - \frac{1}{2}(y'(t) + y'(t+h)) \\ &= y'(t) - y'(t) + \frac{h}{2}y''(t) - \frac{h}{2}y''(t) + O(h^2) \end{aligned}$$

und damit ist das Verfahren von zweiter Ordnung.

Satz 13.1 gibt auch gleich eine Anleitung zur Durchführung der impliziten Verfahren. Glücklicherweise muss das v aus 13.1 nicht explizit ausgerechnet werden. Die Fixpunktiteration für das g aus dem Satz mit Startwert y_k konvergiert gegen y_{k+1} , also führt man in jedem Schritt des impliziten Einschrittverfahrens zur Lösung der impliziten Gleichung einige Schritte der Fixpunktiteration durch.

Beispiel 13.4 Fixpunktiteration für das implizite Eulerverfahren

Wir wenden das implizite Eulerverfahren an und lösen die Definitionsgleichung durch Fixpunktiterationen. Führen wir in jedem Schritt des Eulerverfahrens einen Schritt der Fixpunktiteration durch, so erhalten wir

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_k).$$

Dieses Verfahren hat die Ordnung 1 und benötigt eine Auswertung von f .

Führen wir zwei Schritte der Fixpunktiteration durch, so erhalten wir

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_k + hf(t_{k+1}, y_k)).$$

Hier machen wir ein schlechtes Geschäft: Wir benötigen zwei Auswertungen von f pro Schritt, aber das Verfahren ist trotzdem nur von der Ordnung 1.

Wir machen also in jedem Schritt jetzt zwei Fehler: Einmal den lokalen Diskretisierungsfehler, und zusätzlich den Abbruchfehler, der dadurch entsteht, dass wir die Fixpunktiteration nach dem p . Schritt abbrechen.

Die Kontraktionskonstante im Fixpunktsatz von Banach war Lh . Wir gewinnen also in jedem Schritt der Fixpunktiteration einen Faktor $O(h)$, nach dem p . Schritt ist unsere Approximation von der Ordnung $O(h^p)$. Der lokale Diskretisierungsfehler erhöht sich also, wenn man die implizite Gleichung durch p Schritte der Fixpunktiteration ersetzt, um $O(h^p)$. Es liegt nahe, das p gerade so zu wählen, dass der lokale Diskretisierungsfehler ebenso groß ist wie der Fehler, der durch den Abbruch der Fixpunktiteration entsteht (mehr hierzu im begleitenden Programmierbeispiel).

Kapitel 14

Anwendungen und Implementation

14.1 Runge–Kutta–Verfahren

Der Runge–Kutta–Ansatz liefert Verfahren beliebig hoher Ordnung, die nur Auswertungen von f benutzen. Wir betrachten zunächst noch einmal das Verfahren von Heun. Die Schrittfunction φ war hier definiert durch

$$\varphi(t_k, y_k, h_k) = \frac{1}{2}(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))).$$

Dies schreiben wir in der Form:

$$\begin{array}{r} f_1 = f(t_k, y_k) \\ f_2 = f(t_k + h, y_k + hf_1) \\ \hline \varphi(t_k, y_k, h) = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2 \end{array}$$

Diese Schreibweise legt die folgende Definition nahe.

Definition 14.1 (Definition der Runge–Kutta–Verfahren)

1. Seien $\alpha_j, \gamma_j, \beta_{jl}$ fest gewählt, $j = 1 \dots m, l = 1 \dots j - 1$. Die Schrittfunction φ sei definiert durch

$$\varphi(t_k, y_k, h) = \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 + \dots + \gamma_m f_m = \sum_{j=1}^m \gamma_j f_j$$

mit

$$\begin{aligned}f_1 &= f(t_k + \alpha_1 h, y_k) \\f_2 &= f(t_k + \alpha_2 h, y_k + h(\beta_{2,1} f_1)) \\&\vdots \\f_m &= f(t_k + \alpha_m h, y_k + h \sum_{l=1}^{m-1} \beta_{ml} f_l).\end{aligned}$$

Dann heißt das zugehörige numerische Verfahren m -stufiges explizites Runge-Kutta-Verfahren.

2. Seien $\alpha_k, \gamma_k, \beta_{kl}$ fest gewählt, $k = 1 \dots m, l = 1 \dots m$. Die Schrittfunktion φ sei definiert durch

$$\varphi(t_k, y_k, h) = \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 + \dots + \gamma_m f_m$$

mit

$$\begin{aligned}f_1 &= f(t_k + \alpha_1 h, y_k + h \sum_{l=1}^m \beta_{1,l} f_l) \\f_2 &= f(t_k + \alpha_2 h, y_k + h \sum_{l=1}^m \beta_{2,l} f_l) \\&\vdots \\f_m &= f(t_k + \alpha_m h, y_k + h \sum_{l=1}^m \beta_{m,l} f_l).\end{aligned}$$

Dann heißt das zugehörige numerische Verfahren m -stufiges implizites Runge-Kutta-Verfahren.

Natürlich sind die expliziten Verfahren implizite Verfahren, bei denen wir setzen

$$\beta_{jl} := 0 \text{ für } l \geq j.$$

Satz 14.2 (Ordnung der Runge-Kutta-Verfahren)

1. Sei

$$\sum_{j=1}^m \gamma_j = 1.$$

Dann ist das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren mindestens konvergent von der Ordnung 1 für alle $f \in C^1$.

2. Sei $f \in C^2$ und

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m \gamma_j &= 1 \\ \sum_l \beta_{jl} &= \alpha_j \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j \gamma_j &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Dann ist das zugehörige Runge–Kutta–Verfahren mindestens konvergent von der Ordnung 2.

Wegen dieses Satzes betrachten wir grundsätzlich nur Runge–Kutta–Verfahren, die die Normierungsbedingungen

$$\sum_{j=1}^m \gamma_j = 1, \quad \sum_l \beta_{jl} = \alpha_j \forall j = 1 \dots m$$

erfüllen.

Beweis: Für Lipschitz–stetiges f ist auch φ Lipschitz–stetig für alle Runge–Kutta–Verfahren.

Zum Beweis der Konsistenz machen wir wieder die Taylorentwicklung. Sei also wieder y irgendeine Lösung der Differentialgleichung. Zunächst berechnen wir eine Taylorentwicklung der auftretenden Zwischenstufen f_j . Wir setzen die Normierung für α gleich ein.

$$\begin{aligned}f_j &= f(t, y(t)) + \alpha_j h f_t(t, y(t)) + h \sum_{l=1}^m \beta_{j,l} f_l f_y(t, y(t)) + O(h^2) \\ &= f(t, y(t)) + \alpha_j h f_t(t, y(t)) + h \sum_{l=1}^m \beta_{j,l} (f(t, y(t)) + O(h)) f_y(t, y(t)) + O(h^2) \\ &= y'(t) + h \alpha_j (f_t(t, y(t)) + f(t, y(t)) f_y(t, y(t))) + O(h^2) \\ &= y'(t) + h \alpha_j y''(t) + O(h^2).\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Definition des lokalen Diskretisierungsfehlers

$$\begin{aligned}\tau_h(t, y(t)) &= \frac{1}{h}(y(t+h) - y(t)) - \varphi(t, y(t), h) \\ &= y'(t) + \frac{h}{2}y''(t) - \sum_j \gamma_j f_j + O(h^2) \\ &= y'(t) - \sum_{j=1}^m \gamma_j y'(t) + h\left(\frac{1}{2} - \sum_{j=1}^m \gamma_j \alpha_j\right)y''(t) + O(h^2).\end{aligned}$$

□

14.2 Energieerhaltung

Dieses Kapitel liegt als Online-Dokument vor (integriertes Python-Notebook).

14.3 Fehlerabschätzung und Schrittweitensteuerung

Wir begnügen uns hier mit einer einfachen Idee.

Nach dem diskreten Lemma von Gronwall kann man den globalen Diskretisierungsfehler abschätzen durch die Summe der Konsistenzfehler. Die Konsistenzfehler sind dabei die Fehler, die in einem Schritt des Verfahrens entstehen. Wir schätzen diese Fehler wie folgt:

In jedem Schritt des Verfahrens werden zwei Verfahren mit unterschiedlicher Konsistenzordnung benutzt. Hierbei sei Verfahren 1 mit Verfahrensfunktion $\varphi^{(1)}$ das genauere. Wir berechnen also

$$\begin{aligned}y_{k+1}^{(1)} &= y_k + \varphi^{(1)}(t_k, y_k) \\ y_{k+1}^{(2)} &= y_k + \varphi^{(2)}(t_k, y_k)\end{aligned}$$

Da das erste Verfahren eine höhere Konsistenzordnung hat, gilt für eine Lösung \bar{y} der Differentialgleichung

$$|y_{k+1}^{(2)} - y(t_k)| \leq |y_{k+1}^{(2)} - y_{k+1}^{(1)}| + |y_{k+1}^{(1)} - y(t_k)| \sim |y_{k+1}^{(2)} - y_{k+1}^{(1)}|.$$

Wir können also eine Approximation des lokalen Diskretisierungsfehlers für das zweite Verfahren nur mit Hilfe der berechneten Werte angeben. Implementationsbeispiele finden Sie wieder als Python–Notebooks (online).

Kapitel 15

Lineare Mehrschrittverfahren

Bevor wir uns nun den Mehrschrittverfahren zuwenden, wiederholen wir noch einmal die zentralen Begriffe der Einschrittverfahren:

- **Konsistenz:** Das Verfahren ist Diskretisierung der Differentialgleichung. Der lokale Diskretisierungsfehler, bei dem man die echte Lösung y von 12.1 in die diskretisierte Gleichung einsetzt, geht für kleine Schrittweiten h gegen 0.
- **Konvergenz:** Das Verfahren liefert für eine Familie von Gittern, deren Feinheit gegen 0 geht, die exakte Lösung (dies ist das eigentliche Ziel).
- **Stabilität:** Kleine Fehler im einzelnen Schritt führen zu kleinen Gesamtfehlern, begründet den Satz: Aus Konsistenz folgt Konvergenz (für Einschrittverfahren), und ist eine Folgerung der Gronwallschen Ungleichung.

Die Idee bei den Mehrschrittverfahren ist, die vergangenen Funktionsauswertungen bei der Berechnung der nächsten Approximation mitzunehmen. Wir erhoffen uns dadurch eine deutliche Verringerung des notwendigen Aufwands oder eine deutliche Erhöhung der möglichen Konsistenzordnung. In der Vorgehensweise ähneln die Einschrittverfahren den vielleicht aus der Stochastik bekannten gedächtnislosen Markovprozessen: Der nächste Wert hängt ausdrücklich nur vom aktuellen Zustand ab, nicht von einer Historie. Im Gegensatz dazu stehen die Mehrschrittverfahren.

Mehrschrittverfahren haben hohe Konsistenzordnungen bei nur einer Evaluationen von f . Auf der anderen Seite sind sie nicht notwendig stabil, wie es die Einschrittverfahren sind. Eine Schrittweitensteuerung ist schwierig. Daher sind sie häufig nicht die Standardsolver. In Matlab steht der Adams–Bashforth–Solver als Standard–Mehrschrittverfahren unter dem Namen `ode113` zur Verfügung.

Wir werden in diesem Kapitel zunächst einige Verfahren herleiten, die Bezeichnungen der Einschrittverfahren auf Mehrschrittverfahren übertragen und überprüfen, welche Sätze erhalten bleiben. Zunächst schränken wir die komplette Betrachtung auf lineare Verfahren auf äquidistanten Gittern ein.

Definition 15.1 (lineare Mehrschrittverfahren)

Ein numerisches Verfahren, das auf einem **äquidistanten** Gitter I_h mit Schrittweite h die Näherung $y_h(t_k) = y_k$ der Differentialgleichung berechnet mit

$$\sum_{j=0}^m \alpha_j y_{k+j} = h \sum_{j=0}^m \beta_j f(t_{k+j}, y_{k+j}) =: h \sum_{j=0}^m \beta_j f_{k+j}, \quad k = 0 \dots N - m$$

($\alpha_m \neq 0$) heißt **lineares m -Schritt-Mehrschrittverfahren** oder **lineares Mehrschrittverfahren der Stufe m** . Das Verfahren heißt **explizit**, falls $\beta_m = 0$, ansonsten **implizit**.

Wir dürfen also bei einem m -Mehrschrittverfahren zur Berechnung von y_{k+m} die letzten m Funktionsauswertungen y_k bis y_{k+m-1} noch mitbenutzen. Dies bedeutet natürlich auch, dass wir im ersten Schritt des Verfahrens das y_m berechnen und dafür y_0 bis y_{m-1} benötigen, wobei wir eigentlich nur y_0 haben. Die fehlenden Terme werden üblicherweise mit Einschrittverfahren berechnet, hat man alle zusammen, macht man ab hier mit den Mehrschrittverfahren weiter. Um diese Anlaufrechnung werden wir uns später kümmern.

Beispiel 15.2 (Mittelpunktregel)

$$y_{k+2} - y_k = 2h f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

Definition 15.3 Gegeben sei ein durch die Konstanten α_j und β_j beschriebenes lineares Mehrschrittverfahren. Sei y irgendeine Lösung der Differentialgleichung. Dann ist der lokale Diskretisierungsfehler gegeben durch

$$\begin{aligned} \tau_h(t, y(t)) &= \frac{1}{h} \sum_{j=0}^m \alpha_j y(t + jh) - \sum_{j=0}^m \beta_j f(t + jh, y(t + jh)) \\ &= \frac{1}{h} \sum_{j=0}^m \alpha_j y(t + jh) - \sum_{j=0}^m \beta_j y'(t + jh). \end{aligned}$$

Wieder bekommen wir den lokalen Diskretisierungsfehler, indem wir die Lösungen y der Differentialgleichung in die diskrete Gleichung einsetzen.

Korollar 15.4 (Konsistenzordnung der Mittelpunktregel)

Sei $f \in C^2$. Dann hat die Mittelpunktregel die Konsistenzordnung 2.

Beweis: Wir benutzen für

$$y(t + 2h) - y(t)$$

jeweils eine Taylorentwicklung um $y(t+h)$. Dann fallen alle Terme in h^j mit geradem j weg, und es gilt

$$\begin{aligned}\tau_h(t, y(t)) &= \frac{1}{h}(y(t + 2h) - y(t)) - 2f(t + h, y(t + h)) \\ &= 2y'(t + h) + O(h^2) - 2y'(t + h).\end{aligned}$$

□

Unsere Idee zur Konstruktion ist: Wir wandeln unsere Differentialgleichung wieder in die äquivalente Integralgleichung um, und benutzen unsere Quadraturformeln. Diese haben wir durch Integration des Interpolationspolynoms hergeleitet.

Wir machen ein einfaches Beispiel. Wir wollen y_{k+1} ausrechnen und dabei die Näherungen y_k und y_{k-1} benutzen. Sei f eine Lösung der Differentialgleichung. Dann schreiben wir wieder

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, y(s)) ds.$$

Uns stehen die Näherungen y_k für $y(t_k)$ und y_{k-1} für $y(t_{k-1})$ zur Verfügung. Sei $f_j = f(t_j, y_j)$. Sei dann p das Interpolationspolynom vom Grad 1 mit $p(t_k) = f_k$ und $p(t_{k-1}) = f_{k-1}$. Wir gehen zur Approximation über und erhalten aus der Gleichung

$$y_{k+1} - y_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) ds.$$

Das Interpolationspolynom rechnen wir explizit aus mit Lagrange:

$$p(s) = \frac{s - t_{k-1}}{h} f_k + \frac{t_k - s}{h} f_{k-1},$$

also

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) ds = h\left(\frac{3}{2}f_k - \frac{1}{2}f_{k-1}\right).$$

Insgesamt erhalten wir das Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + h\left(\frac{3}{2}f_k - \frac{1}{2}f_{k-1}\right).$$

Die Ordnung dieses Verfahrens ist 2, denn wir benutzen zwei Vorgänger zur Berechnung der nächsten Approximation. Im Sinne der Definition schreiben wir dieses Verfahren mit Indexshift in der Form

$$y_{k+2} = y_{k+1} + h\left(\frac{3}{2}f_{k+1} - \frac{1}{2}f_k\right).$$

Dieses Verfahren ist explizit, denn y_{k+2} kommt auf der rechten Seite nicht vor.

Wir fassen dies nun allgemeiner.

Für die Lösung unserer Anfangswertaufgabe 12.1 gilt

$$y(t_{k+m}) - y(t_{k+m-r}) = \int_{t_{k+m-r}}^{t_{k+m}} f(t, y(t)) dt.$$

Für die Approximation ersetzen wir die Funktion unter dem Integralzeichen durch sein Interpolationspolynom p_k mit den Stützstellen $t_k + jh$ und den Stützwerten

$$f_{k+j} = f(t_{k+j}, y_{k+j}).$$

Wir erhalten damit z.B. für ein explizites Verfahren, das die Stützwerte f_k bis f_{k+m-1} benutzt

$$y_{k+m} - y_{k+m-r} = \int_{t_{k+m-r}}^{t_{k+m}} p_k(t) dt$$

Für das Interpolationspolynom haben wir dann noch die Wahl zwischen den Interpolationsstellen t_k bis t_{k+m} (implizit) und t_k bis t_{k+m-1} (explizit). Für $r = 1$ erhalten wir die Verfahren von Adams–Bashforth und Adams–Moulton, für $r = 2$ die Verfahren von Nyström und Milne–Simpson. Wir fassen das Ergebnis in folgender Tabelle zusammen:

| Interpolation benutzt | $r = 1$ | $r = 2$ | |
|-----------------------|-----------------|---------------|----------|
| $f_k \dots f_{k+m-1}$ | Adams–Bashforth | Nyström | explizit |
| $f_k \dots f_{k+m}$ | Adams–Moulton | Milne–Simpson | implizit |

Satz 15.5 (Konsistenzordnung der durch Integration hergeleiteten MSV)

Ein numerisches Verfahren mit m Schritten sei durch Integration des Interpolationspolynoms an m (explizit) bzw. $(m + 1)$ (implizit) Stützstellen hergeleitet worden. Dann hat es mindestens die Konsistenzordnung m (explizit) bzw. $(m + 1)$ (implizit).

Beweis: Für explizite Verfahren: Sei y eine Lösung der Differentialgleichung. Weiter sei p das Integrationspolynom, das an den Stellen $t+jh$ den Wert $f(t+jh, y(t+jh))$ annimmt, $j = 0 \dots m-1$. Dann gilt nach Konstruktion der Integrationsformeln

$$\begin{aligned}\tau_h(t, y(t)) &= \frac{1}{h}(y(t+mh) - y(t+(m-r)h)) - \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j f(t+jh, y(t+jh)) \\ &= \frac{1}{h} \int_{t+(m-r)h}^{t+mh} y'(t) dt - \frac{1}{h} \int_{t+(m-r)h}^{t+mh} p(t) dt \\ &= \frac{1}{h} \int_{t+(m-r)h}^{t+mh} f(t, y(t)) - p(t) dt \\ &= O(h^m)\end{aligned}$$

nach 10.3. □

Eine schöne Übersicht über all diese Verfahren mit Rechnungen und Beispielen findet sich (mit leicht anderen Bezeichnungen) in Hairer et al. [1993], Kapitel III.1.

Bemerkung: Dies ist ein phantastisches Ergebnis: Mit nur einer zusätzlichen Auswertung von f können beliebig hohe Konsistenzordnungen erreicht werden!

Wir erwarten nun den Satz: Aus Konsistenz folgt Konvergenz. Leider ist für Mehrschrittverfahren die Situation komplexer.

Beispiel 15.6 *Es werde ein Verfahren möglichst hoher Ordnung der Form*

$$y_{k+2} - (1 + \alpha)y_{k+1} + \alpha y_k = h \left(\frac{3 - \alpha}{2} f_{k+1} - \frac{1 + \alpha}{2} f_k \right)$$

gesucht. Sei $f \in C^3$. Wir bestimmen α durch Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned}
\tau_h(t) &= \frac{1}{h}(y(t+2h) - (1+\alpha)y(t+h) + \alpha y(t)) - \left(\frac{3-\alpha}{2}y'(t+h) - \frac{1+\alpha}{2}y'(t) \right) \\
&= y'(t) \underbrace{\left(2 - (1+\alpha) - \frac{3-\alpha}{2} + \frac{1+\alpha}{2} \right)}_0 \\
&\quad + y''(t) \underbrace{\left(\frac{4h}{2} - (1+\alpha)\frac{h}{2} - \frac{3-\alpha}{2}h \right)}_0 \\
&\quad + y'''(t) \underbrace{\left(\frac{8}{6}h^2 - (1+\alpha)\frac{h^2}{6} - \frac{3-\alpha}{2}\frac{h^2}{2} \right)}_{\frac{h^2}{12}(5+\alpha)} \\
&\quad + O(h^3)
\end{aligned}$$

Also insgesamt eine Konsistenzordnung 3 für $\alpha = -5$ und 2 sonst. Nach unseren Erfahrungen mit den Einschrittverfahren erwarten wir eine entsprechende Konvergenzordnung.

Leider zeigt das numerische Experiment der Vorlesung: Das geht gewaltig schief. Für $\alpha > 1$ und $\alpha < -1.5$ ist der Algorithmus nicht einmal konvergent. Wir müssen vermuten: Der Algorithmus ist dort zwar konsistent, aber wegen mangelnder Stabilität ist er nicht mehr konvergent. Dies versteht man durch einen kleinen Ausflug in die Theorie der linearen Differenzgleichungen.

Kapitel 16

Stabilität von Mehrschrittverfahren

Aufgrund des letzten Beispiels vermuten wir bereits, dass der Satz “Aus Konsistenz folgt Konvergenz” für die Mehrschrittverfahren nicht ohne weitere Bedingungen korrekt ist. Dass er zumindest manchmal korrekt ist, folgte ebenfalls aus den Beispielen.

Wir überlegen noch einmal, warum dies für die Einschrittverfahren galt. Das diskrete Lemma von Gronwall garantierte uns, dass die kleinen Einzelfehler, die wir in jedem Schritt des Verfahrens machen, nicht katastrophal verstärkt werden und damit möglicherweise die Konvergenz verhindern.

Für die Mehrschrittverfahren brauchen wir einen entsprechenden Satz. Dies erreicht man über die analytische Betrachtung von Differenzgleichungen, die wir sofort einführen werden. Den korrekten Beweis finden Sie in meinem Skript zur Vorlesung Numerische Analysis, und er ist sehr technisch. Wir wollen daher hier eine vereinfachte Version beweisen, die den wesentlichen Trick zeigt, aber nicht vollständig ist.

Wir zitieren ohne Beweis: Beim Beweis der Konvergenz konsistenter Verfahren reicht es, sich auf die Auswirkungen der Fehler in den Anlaufwerten y_0, \dots, y_{m-1} des Modellproblems

$$y'(t) = 0, y(0) = 0$$

zu beschränken. Also:

Satz 16.1 *Gegeben sei ein lineares Mehrschrittverfahren der Stufe m . Sei I_h eine Folge von äquidistanten Gittern mit Feinheit h . Falls für jede Wahl der Anlaufwerte $(y_h)_j$ mit $(y_h)_j \rightarrow_{h \rightarrow 0} 0$, $j = 0, \dots, m-1$, gilt: Die Folge (y_h) der Näherungen für das Modellproblem konvergiert gegen 0, so ist das Mehrschrittverfahren stabil für*

alle Anfangswertaufgaben. Es gilt: Aus Konsistenz des Mehrschrittverfahrens (der Ordnung p) folgt Konvergenz (der Ordnung p).

Der Satz sagt zweierlei: Erstens, wir können uns auf die einfachste aller Anfangswertaufgaben (das Modellproblem) beschränken. Zweitens, für die Betrachtung der Fehler reicht es, sich die Auswirkung der Fehler am Anfang anzuschauen.

Wir schauen nun, wann die durch das Mehrschrittverfahren für das Modellproblem gelieferten Näherungen gegen Null konvergieren. Nach Definition des Verfahrens gilt

$$\sum_{j=0}^m \alpha_j y_{k+j} = 0, \alpha_m \neq 0.$$

Insbesondere hängt die Folge nicht vom Gitter I_h ab. Eine Gleichung dieser Form nennen wir eine (homogene) Differenzgleichung, eine Folge mit dieser Eigenschaft eine Lösung der Differenzgleichung.

Als Beispiel betrachten wir die Fibonaccifolge. Sie ist definiert durch

$$-y_k - y_{k+1} + y_{k+2} = 0$$

(ohne Einschränkung schreiben wir die Gleichungen immer mit $\alpha_m = 1$, die Differenzgleichung kann man immer mit einer Konstanten multiplizieren, und die Lösungen bleiben dieselben).

Eine Lösung der Differenzgleichung ist durch die Anlaufwerte y_0 und y_1 festgelegt. Sei $y^{(0)}$ die Lösung mit den Anlaufwerten $(1, 0)$, $y^{(1)}$ die Lösung mit den Anlaufwerten $(0, 1)$. Die Lösungen sind unabhängig von h usw. Die Lösungen bilden einen Unterraum, daher ist jede Linearkombination von Lösungen automatisch auch wieder eine Lösung. Der Unterraum hat die Dimension $m = 2$.

Sei nun y_h die Lösung für die Anlaufwerte $((y_h)_0, (y_h)_1)$. Offensichtlich ist

$$(y_h)_0 y^{(0)} + (y_h)_1 y^{(1)}$$

eine Lösung der Differenzgleichung mit denselben Anlaufwerten wie y_h , also gilt

$$y_h = (y_h)_0 y^{(0)} + (y_h)_1 y^{(1)}.$$

Es gelte nun, dass $(y_h)_j \rightarrow_{h \rightarrow 0} 0$, $j = 0 \dots m - 1$. Falls $y^{(j)}$ beschränkt ist, so gilt

$$\|y_h\|_\infty \leq |(y_h)_0| \|y^{(0)}\|_\infty + |(y_h)_1| \|y^{(1)}\|_\infty \rightarrow 0.$$

Korollar 16.2 Der globale Diskretisierungsfehler (für das Modellproblem, und damit für alle Anfangswertaufgaben, bei konsistenten Anlaufwerten) geht mit der Gitterfeinheit gegen Null, wenn die Lösungen der Differenzgleichung

$$\sum_{j=0}^m \alpha_j y_{k+j} = 0$$

beschränkt sind für alle Anlaufwerte.

Wir müssen also untersuchen: Wann sind die Lösungen einer homogenen Differenzgleichung beschränkt? Wir geben zunächst eine alternative, nicht-rekursive Basis für die Lösungen der homogenen Differenzgleichung an.

Satz 16.3 Es sei

$$\rho(x) = \sum_{j=0}^m \alpha_j x^j$$

das charakteristische Polynom der Differenzgleichung

$$\sum_{j=0}^m \alpha_j y_{k+j} = 0.$$

Seien x_l die (komplexen) Nullstellen von ρ mit Vielfachheiten σ_l . Dann ist eine Basis für den Unterraum U der Lösungen der Differenzgleichung im Raum aller Folgen gegeben durch

$$(y^{(l,r)})_j = j^r x_l^j, \quad r = 0 \dots \sigma_l - 1.$$

Beweis: Die angegebenen Folgen sind linear unabhängig. Die Anzahl der Folgen ist $\sum_l \sigma_l = m$. Wenn wir zeigen können, dass die Folgen Lösungen der Differenzgleichung sind, sind wir fertig.

Zunächst gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} 0 &= \rho(x_l) \\ &= x_l^k \rho(x_l) \\ &= \sum_{j=0}^m \alpha_j x_l^{k+j} \\ &= \sum_{j=0}^m \alpha_j (y^{(l,0)})_{k+j} \end{aligned}$$

und damit ist $y^{(l,0)}$ Lösung der Differenzgleichung.

Sei nun x_l eine doppelte Nullstelle von ρ , also $\sigma_l \geq 2$. Dann gilt

$$\rho(x_l) = 0 = \rho'(x_l) \implies (t^{k+1} \rho(t))'(x_l) = 0.$$

Eingesetzt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=0}^m \alpha_j (k+j+1) x_l^{k+j} \\ &= \sum_{j=0}^m \alpha_j (k+j) x_l^{k+j} + \sum_{j=0}^m \alpha_j x_l^{k+j} \\ &= \sum_{j=0}^m \alpha_j (y^{(l,1)})_{k+j}. \end{aligned}$$

Also ist für $\sigma_l \geq 2$ auch $y^{(l,1)}$ eine Lösung der Differenzgleichung, usw. □

Beispiel 16.4 (Fibonacci)

Wir betrachten wieder die Fibonaccifolge. Das charakteristische Polynom ist hier

$$\rho(x) = x^2 - x - 1$$

mit den Lösungen

$$x_{0,1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Diese Zahlen sind wohlbekannt aus dem goldenen Schnitt.

Also sind die Folgen

$$(y^{(0,0)})_k = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k, (y^{(1,0)})_k = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k$$

eine Basis des Raums aller Fibonaccifolgen. Die Standard-Fibonaccifolge y , die mit $(0, 1)$ beginnt, lässt sich schreiben als

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right).$$

Wir gewinnen also eine nicht-rekursive Darstellung der Fibonacci-Zahlen.

Beispiel 16.5 Wir betrachten die Differenzgleichung

$$y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = 0$$

(diese gehört zu einem Mehrschrittverfahren, das unabhängig von der Anfangswertaufgabe konsistent ist). Das charakteristische Polynom ist

$$\rho(x) = x^2 - 2x + 1.$$

$x = 1$ ist die einzige (doppelte) Nullstelle.

Die Basislösungen sind entsprechend gegeben durch

$$(y^{(0,0)})_k = 1^k = 1, (y^{(0,1)})_k = k 1^k = k.$$

Korollar 16.6 Die Basislösungen der Differenzgleichung sind beschränkt genau dann, wenn

1. Für alle Nullstellen x_l mit zugehöriger Vielfachheit σ_l des charakteristischen Polynoms gilt

$$|x_l| \leq 1.$$

2. Falls $|x_l| = 1$, so gilt $\sigma_l = 1$.

Definition 16.7 (Wurzelbedingung von Dahlquist)

Eine Differenzgleichung heißt stabil, wenn ihre Basislösungen beschränkt sind, d.h. wenn die Bedingungen aus 16.6 erfüllt sind.

Mit den Vorbemerkungen:

Korollar 16.8 Falls ein Mehrschrittverfahren konsistent ist (von der Ordnung p), und das zugehörige Differenzenverfahren die Wurzelbedingung von Dahlquist erfüllt, so ist das Mehrschrittverfahren konvergent von der Ordnung p .

Beispiel 16.9 (Stabilität von konkreten Mehrschrittverfahren)

1. *Einschrittverfahren*: Wir können Einschrittverfahren interpretieren als Mehrschrittverfahren mit $m = 1$. Sie sind von der Form

$$y_{k+1} - y_k = \varphi$$

und damit

$$\rho(x) = x - 1.$$

Die einzige (einfache) Nullstelle von ρ ist $x = 1$. Also sind Einschrittverfahren immer stabil (und dies stimmt mit unserem alten Satz überein).

2. Aus Integration gewonnene Mehrschrittverfahren sind von der Form

$$y_{k+m} - y_{k+m-r} = \dots$$

Es gilt

$$\rho(x) = x^m - x^{m-r} = x^{m-r}(x^r - 1).$$

ρ hat die $(m-r)$ -fache Nullstelle 0 und die r -ten Einheitswurzeln, die alle die Vielfachheit 1 haben. Also sind alle diese Verfahren stabil.

3. Das Mehrschrittverfahren

$$y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = 0$$

ist konsistent, aber das Differenzenverfahren erfüllt nicht die Wurzelbedingung (1 ist doppelte Nullstelle von ρ , siehe oben), also ist das Mehrschrittverfahren nicht stabil.

4. In 15.6 gilt

$$\rho(x) = x^2 - (1 + \alpha)x + \alpha.$$

Die Nullstellen sind 1 und α , d.h. es muss erfüllt sein

(a) $|\alpha| \leq 1$

(b) $\alpha \neq 1$ (ansonsten ist 1 doppelte Nullstelle von ρ).

Kapitel 17

A–Stabilität für Einschrittverfahren

Zu guten numerischen Verfahren zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen gehört noch etwas mehr als nur Stabilität und Konvergenz.

Wir versuchen, die Verfahren so zu wählen, dass möglichst viele Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung für die Lösungen der Differenzgleichungen erhalten bleiben. Wir betrachten dazu

Definition 17.1 (Modellproblem von Dahlquist)

$$y'(t) = \lambda y(t), y(0) = 1, \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \lambda < 0.$$

Die analytische Lösung ist $y(t) = \exp(\lambda t)$. Offensichtlich ist der Betrag der Lösung monoton fallend, und das erwarten wir auch von der numerischen Approximation, unabhängig von h .

Bemerkung: Lokal kann jede Differentialgleichung auf ein System solcher Modellgleichungen zurückgeführt werden (siehe Hanke-Bourgeois [2006], Abschnitt 77).

Definition 17.2 (A–Stabilität)

Ein Verfahren heißt A–stabil, wenn für das Dahlquist–Problem und äquidistante Gitter mit Schrittweite h die numerische Approximation im Betrag monoton fallend ist für alle h und alle λ mit Realteil kleiner 0, dass also gilt

$$|y_h(t_{k+1})| \leq |y_h(t_k)| \quad \forall k.$$

Für Runge–Kutta–Verfahren lässt sich die A–Stabilität einfach überprüfen.

Satz 17.3 (Stabilitätsfunktion und Stabilitätsbereich von Runge–Kutta–Verfahren)

Für die durch Runge–Kutta–Verfahren gelieferten Näherungen für die Lösung des Dahlquist–Problems gilt

$$y_h(t_{k+1}) = y_{k+1} = R(\lambda h)y_k = R(\lambda h)y_h(t_k).$$

Für explizite Verfahren ist R ein Polynom, für implizite Verfahren eine rationale Funktion. Der Bereich von \mathbb{C} mit $|R(z)| \leq 1$ heißt Stabilitätsbereich.

Es gilt

$$|y_h(t_{k+1})| \leq |y_h(t_k)| \quad \forall k$$

genau dann, wenn λh im Stabilitätsbereich liegt. Das Verfahren ist A –stabil genau dann, wenn der Stabilitätsbereich die komplette linke komplexe Halbebene umfasst.

Beweis: In der Vorlesung, mit Hilfe der Cramerschen Regel.

Beispiel 17.4 (Beispiele zur Stabilitätsfunktion)

1. Euler explizit:

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) = y_k + h\lambda y_k = (1 + h\lambda)y_k.$$

Es ist also $R(z) = 1 + z = z - (-1)$. Das Verfahren ist nicht A –stabil. Das Stabilitätsgebiet ist ein Kreis um -1 mit Radius 1 .

2. Euler implizit:

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_{k+1}) = y_k + h\lambda y_{k+1}$$

und damit

$$y_{k+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} y_k.$$

Die Stabilitätsfunktion ist

$$R(z) = \frac{1}{1 - z}.$$

Es gilt $|R(z)| \leq 1$ außerhalb eines Kreises mit Radius 1 um die 1 . Die linke komplexe Halbebene ist ganz im Stabilitätsbereich enthalten. Das Verfahren ist A –stabil.

Satz 17.5 (A–Stabilität expliziter Runge–Kutta–Verfahren)

Kein explizites, konsistentes Runge–Kutta–Verfahren ist A –stabil.

Beweis: Für explizite Verfahren ist R ein Polynom. Da das Verfahren konsistent ist, muss der Grad n von $R > 0$ sein. Sei

$$R(x) = a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = x^n \underbrace{\left(a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n} \right)}_{\rightarrow a_n, |x| \rightarrow \infty}, a_n \neq 0.$$

Insbesondere gilt $|R(x)| \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow -\infty$, also ist $|R(z)|$ größer als 1 für ein z in der linken Halbebene, und das Verfahren ist nicht A -stabil. \square

Satz 17.6 (Taylorentwicklung der Stabilitätsfunktion)

Sei $R(x)$ die Stabilitätsfunktion eines Runge–Kutta–Verfahrens der Ordnung p . Dann gilt

$$|R(h) - e^h| = O(h^{p+1}) \text{ für } h \rightarrow 0.$$

Die Taylorentwicklungen von $R(h)$ und e^h stimmen also bis h^p überein.

Beweis: Wir wenden das Verfahren an auf das Modellproblem 17.1. Da es konsistent ist von der Ordnung p , gilt für $h > 0$

$$\begin{aligned} R(h) - e^h &= R(h) \cdot 1 - e^h \\ &= y_1 - y(h) \\ &= O(h^{p+1}). \end{aligned}$$

\square

Wir nutzen dies, um zu folgern:

Korollar 17.7 Für Runge–Kutta–Verfahren, die mindestens konsistent sind von der Ordnung 1, liegt die 0 immer auf dem Rand des Stabilitätsgebiets.

Beweis: Nach 17.6 gilt

$$R(h) - 1 = h + O(h^2).$$

Insbesondere ist $R(0) = 1$, also liegt die 0 im Stabilitätsgebiet. $R(h) - 1$ wechselt für reelle h bei 0 sein Vorzeichen, links vom Nullpunkt liegt z im Stabilitätsgebiet, rechts nicht. \square

Die Bedingung der A -Stabilität ist besonders für λ mit im Betrag sehr großen, negativen Realteil schwer zu erfüllen. Da das Stabilitätsgebiet beschränkt ist, sollten wir nach dem letzten Satz h dann klein wählen für explizite Verfahren.

Kapitel 18

Randwertprobleme

Abschließend wollen wir uns noch der Behandlung linearer Randwertaufgaben zuwenden. Bisher haben wir ausschließlich Anfangswertaufgaben behandelt, d.h. wir suchten Funktionen $y(t)$ mit

$$y'(t) = f(t, y(t)), y(a) = y_0, \text{ auf } [a, b].$$

Für eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung lautet das Anfangswertproblem

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = f(t), y(a) = y_0, y'(a) = y'_0.$$

Wir müssen also im Punkt a Werte für y und seine Ableitung vorgeben. Diesen Fall haben wir sehr gut untersucht, die Lösbarkeitsbedingungen sind einfach analytisch angebar, und wir haben konvergente numerische Methoden für diesen Fall angegeben.

Will man aber etwa die Auslenkung eines an zwei Seiten festgebundenen Seils beschreiben, so kann man das zwar durch eine lineare Differentialgleichung tun. Randbedingung ist aber offensichtlich, dass die Auslenkung am linken und rechten Rand verschwindet, d.h.

$$y(a) = y(b) = 0.$$

Gleiches passiert, wenn man die Temperaturverteilung eines Stabs berechnen möchte, der an beiden Enden erhitzt wird.

Wir landen also bei Randwertproblemen, bei denen die festen Bedingungen nicht nur am Randpunkt a , sondern auch am Randpunkt b vorgegeben sind.

Definition 18.1 (Lineare) Randwertprobleme

Ein Randwertproblem sucht Funktionen

$$y(t) \in C^1([a, b] \mapsto \mathbb{R}^n)$$

mit

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad g(y(a), y'(a), y(b), y'(b)) = 0$$

für eine Funktion

$$g : \mathbb{R}^{4n} \mapsto \mathbb{R}^n.$$

Typischerweise haben wir Dirichlet–Randbedingungen (bei denen der Wert der Funktion vorgeschrieben ist), Neumann–Randbedingungen (bei denen der Wert der Ableitung vorgeschrieben ist) oder gemischte Bedingungen (bei denen eine Kombination aus Ableitung und Wert der Funktion vorgeschrieben ist, jeweils in einem Randpunkt). Sind g und f (affin) linear, so nennen wir das Randwertproblem auch linear.

Für $n = 2$ ergibt sich damit

1. $y(a) = z_0, y(b) = z_1$: *Dirichlet–Randbedingungen.*
Falls $z_0 = z_1 = 0$: *Homogene Dirichlet–Randbedingungen.*
2. $y'(a) = z_0, y'(b) = z_1$: *Neumann–Randbedingungen.*
Falls $z_0 = z_1 = 0$: *Homogene Neumann–Randbedingungen.*
3. $g_1(y(a), y'(a)) = 0, g_2(y(b), y'(b)) = 0$: *Gemischte Randbedingungen.*
4. $y(a) = y(b), y'(a) = y'(b)$: *Periodische Randbedingungen.*

Die Lösbarkeit dieses Systems ist leider erheblich schwieriger zu zeigen als bei Anfangswertaufgaben. Wir betrachten als Beispiel eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und Dirichlet–Randbedingungen:

$$-y''(t) + \alpha^2 y(t) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad y(a) = z_0, \quad y(b) = z_1, \quad b > a.$$

Alle Lösungen der Differentialgleichung sind von der Form

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad y_1(t) = \exp(\alpha t), \quad y_2(t) = \exp(-\alpha t)$$

und zur Erfüllung der Randwerte erhalten wir die Gleichungen

$$c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = z_0, \quad c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) = z_1.$$

Das System ist also lösbar, wenn die Matrix

$$W = \begin{pmatrix} y_1(a) & y_1(b) \\ y_2(a) & y_2(b) \end{pmatrix}$$

invertierbar ist bzw. wenn ihre Determinante nicht verschwindet. Setzen wir die Lösungen ein, so gilt

$$W = \begin{pmatrix} \exp(\alpha a) & \exp(\alpha b) \\ \exp(-\alpha a) & \exp(-\alpha b) \end{pmatrix}.$$

Die Determinante dieser Matrix ist gerade

$$\det(W) = \exp(\alpha(a-b)) - \exp(-\alpha(a-b))$$

und da die Exponentialfunktion für reelle Argumente monoton ist, verschwindet dieser Ausdruck nicht. Damit ist die Matrix invertierbar und die Dirichlet-Aufgabe eindeutig lösbar. Tatsächlich sind lineare Dirichlet-Randwertaufgaben zweiter Ordnung der Form

$$-y''(t) + q(t)y(t) = f(t), \quad y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1$$

für stetiges f und $q(t) \geq 0$ immer eindeutig lösbar. Wir werden einen Beweis mit Hilfe der Variationsmethoden angeben.

Anders ist es im Fall $q(t) < 0$. Wir betrachten das fast gleiche Randwertproblem für die Helmholtzgleichung

$$-y''(t) - \alpha^2 y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Wir können die Analyse übertragen mit den Grundlösungen

$$y_1(t) = \cos(\alpha t), \quad y_2(t) = \sin(\alpha t).$$

Die trigonometrischen Funktionen haben natürlich ein fundamental anderes Verhalten als die Exponentialfunktion. Insbesondere ist die Matrix

$$W = \begin{pmatrix} \sin(0) & \sin(\alpha\pi) \\ \cos(0) & \cos(\alpha\pi) \end{pmatrix}$$

genau für $\alpha \in \mathbb{Z}$ nicht invertierbar. Wir erhalten also: Die Randwertaufgabe ist eindeutig lösbar, falls $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Eine allgemeine Lösbarkeit mit einem griffigen Kriterium (Lipschitz–Stetigkeit wie bei den Anfangswertaufgaben) ist nicht gegeben, es muss jede Gleichung einzeln untersucht werden.

An dem einfachen Beispiel der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit homogenen Randbedingungen lasen sich bereits alle Schwierigkeiten studieren. Wir betrachten im Folgenden das **Sturm–Liouville–Problem**

$$-(p(t)y'(t))' + q(t)y(t) = f(t)$$

mit linearen Randbedingungen, differenzierbarer Funktion p und stetiger Funktion q . Wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, werden wir uns dabei auf den Fall $p = 1$ und zunächst homogene Dirichlet–Randbedingungen zurückziehen, also

$$-y''(t) + q(t)y(t) = f(t), \quad y(a) = y(b) = 0.$$

Wir zitieren zunächst den Satz:

Satz 18.2 *Sei $q(t) \geq 0$, f stetig. Dann ist das Sturm–Liouville–Problem mit homogenen Dirichlet–Anfangswerten eindeutig lösbar.*

Wir werden verschiedene Ansätze zur numerischen Lösung dieses Problems untersuchen.

Bemerkung: Wir betrachten in diesem Abschnitt nur gewöhnliche Differentialgleichungen. Tatsächlich lassen sich, im Gegensatz zu Anfangswertaufgaben, alle vorgestellten Methoden und Sätze in höhere Dimensionen, also für partielle Differentialgleichungen, übertragen.

In einer Dimension sind sie aber viel anschaulicher, oft trivial. Zum Verständnis der Verhältnisse bei partiellen Differentialgleichungen ist es also sehr nützlich, die Interpretation als gewöhnliche Differentialgleichung im Kopf zu behalten. Wir werden hier immer einige Beziehungen zu den partiellen Differentialgleichungen angeben, auch wenn Sie diese bisher nicht gehört haben oder hören werden.

18.1 Schießverfahren

Der Hintergrund dieser Verfahren ist einfach zu erraten. Eine Kanone, deren Abschusswinkel α variabel ist, stehe in einer Ebene am Punkt a . Das Zielobjekt stehe am Punkt b . Sei $y_\alpha(t)$ die Höhe der Kugel auf dem Weg von a nach b an einem Punkt t . Dann ist unser Ziel, durch Versuch und Irrtum $\alpha = \tilde{\alpha}$ so zu wählen, dass $y_{\tilde{\alpha}}(b) = 0$. y_α genügt einer gewöhnlichen Differentialgleichung, das gesuchte $y_{\tilde{\alpha}}$ genügt den homogenen Dirichlet–Randbedingungen $y_{\tilde{\alpha}}(a) = y_{\tilde{\alpha}}(b) = 0$.

Dies interpretieren wir noch etwas um. Gesucht sei die Lösung y des Sturm–Liouville–Problems. Für jedes α besitzt die Anfangswertaufgabe mit der vorgegebenen Differentialgleichung und $y(a) = 0, y'(a) = \alpha$ eine Lösung und ist leicht numerisch berechenbar mit den Algorithmen des letzten Kapitels. Wir suchen nun ein α mit $F(\alpha) := y_\alpha(b) = 0$. F ist eine nichtlineare, eindimensionale, berechenbare Funktion. Wir suchen eine Nullstelle von F . Verfahren dazu haben wir kennengelernt, etwa das Newton–Verfahren oder das Sekanten–Verfahren (Regula falsi). Voraussetzung zur Anwendung dieser Verfahren ist, dass die Funktion mindestens einmal stetig differenzierbar ist. Tatsächlich gilt der Satz:

Satz 18.3 (Differenzierbarkeit der Lösungen von Anfangswertaufgaben nach ihren Anfangswerten)

Sei $y_\alpha(t)$ die Lösung der Anfangswertaufgabe für die Differentialgleichung des Sturm–Liouville–Problems für die Anfangswerte

$$y'_\alpha(a) = \alpha, y_\alpha(a) = 0.$$

Sei

$$F(\alpha) := y_\alpha(b).$$

Dann ist F differenzierbar.

(ohne Beweis)

Dies liefert uns ein numerisches Verfahren zur Lösung von Randwertaufgaben.

1. Implementiere die Funktion $F(\alpha)$, die eine Approximation für $y_\alpha(b)$ berechnet mit den numerischen Verfahren des letzten Kapitels.
2. Nutze ein numerisches Verfahren zur Bestimmung der Nullstelle von F , zum Beispiel das Newton–Verfahren oder das Sekanten–Verfahren.

18.2 Diskretisierungsverfahren

Wir können auch die Diskretisierungsidee aus dem letzten Kapitel zur Lösung einsetzen. Sei wieder

$$I_h = (t_0, \dots, t_N)$$

ein zulässiges Gitter auf $[a, b]$, ohne Einschränkung wählen wir es in diesem Kapitel immer äquidistant. Sei y die Lösung des Sturm–Liouville–Problems. Wir suchen Gitterfunktionen

$$y_h = (y_k), y(t_k) \sim y_h(t_k).$$

In den inneren Punkten des Gitters diskretisieren wir die Differentialgleichung konsistent, gibt $N - 1$ Gleichungen, plus zwei Randbedingungen, macht insgesamt $N + 1$ Gleichungen für $N + 1$ Unbekannte.

Wir betrachten als Modellproblem die eindimensionale **Poisson–Gleichung**

$$-y''(t) = f(t)$$

für t in $[0, 1]$ auf einem äquidistanten Gitter mit homogenen Dirichlet–Randbedingungen, $h = 1/N$. Zur Diskretisierung nutzen wir die Diskretisierung der zweiten Ableitung aus 10.1. Wir erhalten die Gleichungen

$$\begin{aligned} -\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} &= f_1 = f(t_1) \\ &\vdots \\ -\frac{y_{N-2} - 2y_{N-1} + y_N}{h^2} &= f_{N-1} = f(t_{N-1}) \end{aligned}$$

Setzen wir die Randbedingung $y_0 = y_N = 0$ ein, so erhalten wir für die Unbekannten y_1, \dots, y_{N-1} das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{=:L_h} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{pmatrix}}_{=:y_h} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{pmatrix}}_{=:f_h}.$$

Die Diskretisierung ist konsistent nach 10.1. Ist das Gesamtverfahren auch konvergent, d.h. gilt

$$\|y|_{I_h} - y_h\| \mapsto 0$$

? Wir untersuchen das zunächst für die 2-Norm.

Die Eigenvektoren von L_h lassen sich leicht angeben: Es sind die Vektoren

$$y^k \in \mathbb{R}^{N-1}, (y^k)_j = \sin(k\pi jh), k, j = 1, \dots, N-1,$$

zu den Eigenwerten

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2(kh\pi/2), k = 1, \dots, N-1.$$

Mit den Additionstheoremen gilt nämlich

$$\begin{aligned} & -\sin(x-y) + 2\sin(x) - \sin(x+y) \\ &= -\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) + 2\sin(x) - \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \\ &= 2(1 - \cos(y))\sin(x) \\ &= 2\left(1 - \cos\left(\frac{y}{2} + \frac{y}{2}\right)\right)\sin(x) \\ &= 2\left(1 - \cos^2\frac{y}{2} + \sin^2\frac{y}{2}\right)\sin(x) \\ &= \left(4\sin^2\frac{y}{2}\right)\sin(x) \end{aligned}$$

und dann durch Einsetzen von $x = k\pi jh$ und $y = k\pi h$.

Es gilt

$$\lambda_k \geq \lambda_1 \geq \frac{4}{h^2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{h^2\pi^2}{4} = 4$$

unter Benutzung der Abschätzung

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x, x \in [0, \pi/2].$$

L_h hat keinen Eigenwert 0. Insbesondere ist L_h invertierbar, das oben angegebene Gleichungssystem für y_h ist eindeutig lösbar, und sogar sehr effizient lösbar, denn L_h ist eine Tridiagonalmatrix (d.h., sie hat nur Einträge unter- und oberhalb der Hauptdiagonalen), für diese Matrizen vereinfacht sich das Gaussverfahren enorm.

L_h ist symmetrisch positiv semidefinit. Die Eigenwerte von L_h^{-1} sind die Kehrwerte der Eigenwerte von L_h , also ist nach 3.17

$$\|L_h^{-1}\|_2 \leq 1/4.$$

Die Konvergenz definieren wir natürlich wieder wie in 12.4. Es gilt

$$\begin{aligned} \|y|_{I_h} - y_h\| &= \|L_h^{-1}(L_h y|_{I_h} - f_h)\| \\ &\leq \underbrace{\|L_h^{-1}\|}_{\text{Stabilitätsfaktor}} \cdot \underbrace{\|L_h(y|_{I_h}) - f_h\|}_{\text{Konsistenzfehler}} \end{aligned}$$

Für unser Verfahren gilt mit der euklidischen Norm: Der Stabilitätsfaktor ist beschränkt, die Konsistenz ist ein $O(h^2)$, also ist das Verfahren konvergent von der Ordnung 2. Dies legt nahe

Definition 18.4 (Stabilität für Diskretisierungen von Randwertproblemen)

Die Diskretisierung eines Randwertproblems heißt stabil, falls $\|L_h^{-1}\|$ unabhängig von h nach oben beschränkt ist.

Damit gilt sofort wieder unser Satz:

Satz 18.5 (Konvergenz für Diskretisierungen von Randwertproblemen)

Aus Stabilität und Konsistenz (der Ordnung p) folgt Konvergenz (der Ordnung p).

Leider steht hier zunächst nur die euklidische Norm. Dies ist ungünstig: Es garantiert uns keine punktweise Konvergenz und insbesondere keine punktweisen Fehlerabschätzungen.

Bisher haben wir Konvergenz immer bezüglich der Maximumnorm betrachtet. Das wollen wir auch beibehalten. Zur Untersuchung dieser Konvergenz benötigen wir einige spezielle Eigenschaften der oben angegebenen Matrix L_h .

Definition 18.6 (M-Matrizen)

Sei A eine reelle, invertierbare $N \times N$ -Matrix. A heißt M-Matrix genau dann, wenn

$$A_{ii} > 0 \forall i, A_{ik} \leq 0 \forall i \neq k, A_{ik}^{-1} \geq 0 \forall i, k.$$

Die wesentliche Eigenschaft von Matrizen mit positiven Einträgen ist ihre Monotonie.

Lemma 18.7 (Monotonie für M-Matrizen)

Sei $L_h \in \mathbb{R}^{N \times N}$ eine M-Matrix. Seien

$$u, v \in \mathbb{R}^n, u \leq v.$$

Dann gilt

$$L_h^{-1}u \leq L_h^{-1}v.$$

Hier und im Folgenden sind Vektorungleichungen immer elementweise gemeint.

Beweis: Da alle Einträge von L_h^{-1} nichtnegativ sind, gilt

$$L_h^{-1}(v - u) \geq 0.$$

□

Satz 18.8 (L_h ist M -Matrix)

Sei A eine reelle, invertierbare, schwach diagonaldominante $N \times N$ -Matrix mit positiven Hauptdiagonalelementen und nicht-positiven Außerdiagonalelementen. Dann ist A eine M -Matrix. Insbesondere ist L_h eine M -Matrix.

Beweis: Sei $b < 0$, $Ax = b$. Angenommen,

$$x_j = \max\{x_1, \dots, x_N\} > 0.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} A_{jj}x_j &= b_j - \sum_{k \neq j} A_{jk}x_k \\ &< - \sum_{k \neq j} A_{jk}x_j \\ &\leq A_{jj}x_j. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch, also gilt

$$b < 0 \implies A^{-1}b < 0.$$

Sei $b \leq 0$. Dann gilt

$$b^\epsilon = b - \epsilon < 0 \implies 0 > A^{-1}b^\epsilon = A^{-1}b - A^{-1}\epsilon \implies A^{-1}b \leq 0.$$

Mit der Wahl $b = -e_k \leq 0$ folgt $A^{-1}e_k \geq 0$, die k . Spalte von A^{-1} ist also ≥ 0 , und damit $A^{-1} \geq 0$, also ist A eine M -Matrix. □

Satz 18.9 (Stabilität des Standardverfahrens)

Das Standard-Differenzschema zur Berechnung der Lösung der eindimensionalen Poisson-Gleichung ist stabil bezüglich der Maximumnorm.

Beweis: Zu zeigen ist: $\|L_h^{-1}\|_\infty$ ist unabhängig von h beschränkt. Wir betrachten das Problem auf dem Intervall $[0, 1]$. Sei

$$w(t) = \frac{1}{2}t(1 - t).$$

Dann ist

$$-w'' = 1, w(0) = 0, w(1) = 0, w \geq 0.$$

Sei $\mathbf{1}$ der Vektor, der nur aus Einsen besteht, und

$$w_h = w|_{I_h}.$$

L_h ist konsistente Diskretisierung der zweiten Ableitung, d.h.

$$\|L_h(w_h) - \mathbf{1}\|_\infty \leq Ch^2$$

und damit

$$L_h(w_h) \geq -Ch^2 + \mathbf{1}$$

und insbesondere, falls h klein genug ist,

$$L_h(w_h) \geq \frac{1}{2}\mathbf{1}.$$

Diese Vektorungleichungen sind wieder alle jeweils elementweise zu interpretieren.

L_h ist M -Matrix. Nach 18.7 gilt

$$2w_h = 2L_h^{-1}L_h(w_h) \geq L_h^{-1}\mathbf{1}.$$

Dies setzen wir nun noch zusammen:

$$\|L_h^{-1}\|_\infty = \|L_h^{-1}\mathbf{1}\|_\infty \leq 2\|w_h\|_\infty \leq 2\|w\|_\infty.$$

□

Bemerkung: Für den einfachen Fall der Poissongleichung, den wir hier betrachten, ist die Diskretisierung sogar exakt, d.h. $L_h w_h = \mathbf{1}$. Damit ist für diesen Fall sogar

$$\|L_h^{-1}\|_\infty \leq \|w\|_\infty = \frac{1}{8}.$$

Bemerkung: Wir haben oben gesehen, dass für $p = 1$ die analytische Lösbarkeit des Sturm–Liouville–Problems vom Vorzeichen von q abhängt. Hier bekommen wir ein ähnliches Problem: Man sieht leicht, dass q weiter positiv semidefinit und eine M -Matrix bleibt, wenn $q \geq 0$, unsere Analyse lässt sich also mit leichten Änderungen retten.

Sobald $q < 0$, also dort, wo die analytische Lösbarkeit nicht sicher war, bricht diese Argumentation aber zusammen. Unsere analytischen Schwierigkeiten für $q < 0$ übersetzen sich in numerische Schwierigkeiten. Die Analysis und die Numerik hängen also, wie hoffentlich erwartet, sehr eng zusammen und sollten immer zusammen betrachtet werden.

Korollar 18.10 (Konvergenz des Standardverfahrens)

Das Standardverfahren zur Berechnung der Lösung der eindimensionalen Poisson-Gleichung ist konvergent von der Ordnung 2 (bezüglich der Maximumnorm).

Leider ist dieses Ergebnis unbefriedigend. Anders als bei den Anfangswertproblemen ist der Beweis recht uneinsichtig und nur schwer auf andere Differentialgleichungen oder Diskretisierungen übertragbar. Wir werden daher ein neues Hilfsmittel, die Variationsrechnung, kennenlernen.

18.3 Variationsmethoden

Bei der Behandlung des Steinwurfs in 14.2 hatten wir bereits bemerkt: Differentialgleichungen in der Physik entstehen häufig aus Energiebetrachtungen. Dabei wird meist ein durch Integrale definiertes Energiefunktional minimiert. Dies führt in der Praxis auf eine Integralgleichung für die Lösung.

Unter der Annahme, dass die Lösungen differenzierbar sind, können wir diese dann in eine Differentialgleichung umschreiben. Das ist allerdings eine Einschränkung und führt dazu, dass viele Probleme der Physik als Differentialgleichung keine Lösung besitzen. Es liegt daher nahe, statt der Differentialgleichungen die zugehörige Integralgleichung bzw. das Minimierungsproblem zu untersuchen.

Definition 18.11 (Grundräume zur Lösung des Variationsproblems)

Wir betrachten alle Funktionen immer auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$.

1. C^k ist der Raum der k -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $[a, b]$. C^k ist vollständig bzgl. der Norm

$$\|f\|_{k,\infty} = \max_{j=0\dots k} \|f^{(j)}\|_{\infty}.$$

2. $C^{\infty}([a, b])$ ist der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf $[a, b]$.
3. $C_0^{\infty}([a, b])$ ist der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf $[a, b]$ mit verschwindenden Randwerten für alle Ableitungen bzw. mit kompaktem Träger im Inneren von $[a, b]$, also

$$C_0^{\infty} = \{\varphi \in C^{\infty}([a, b]) : \varphi^{(k)}(a) = \varphi^{(k)}(b) = 0 \forall k \geq 0\}.$$

Beispiel: Sei

$$w(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist $w \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit Träger in $[-1, 1]$. Entsprechend ist

$$w_{\epsilon,a} := \frac{1}{\epsilon} w\left(\frac{x-a}{\epsilon}\right)$$

in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit Träger in $[a-\epsilon, a+\epsilon]$. $w_{\epsilon,a}$ ist im Inneren dieses Intervalls positiv, das Integral von $w_{\epsilon,a}$ über \mathbb{R} ist unabhängig von ϵ .

4. $L^2([a, b])$ ist der Raum der Funktionen auf $[a, b]$, die quadratisch integrierbar sind, d.h.

$$\int_a^b f(t)^2 dt < \infty.$$

Mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt, \|f\|^2 := (f, f) \forall f, g \in L^2$$

ist L^2 ein Hilbertraum, insbesondere vollständig. Es gilt die Cauchy–Schwarz–Ungleichung

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

Satz 18.12 Es sei $f \in L^2([a, b])$, und es sei

$$(f, \varphi) = 0 \forall \varphi \in C_0^\infty([a, b]).$$

Dann ist $f = 0$.

Beweis: Wir zeigen den Satz für f stetig. Angenommen, $f(z) \neq 0$ für ein $z \in [a, b]$. Dann gibt es eine ϵ -Umgebung von z , so dass f dort nicht Null wird und sein Vorzeichen nicht ändert. Nach Voraussetzung gilt

$$0 = (f, w_{z,\epsilon}) = \int_a^b f(x)w_{z,\epsilon}(x) dx = \int_{z-\epsilon}^{z+\epsilon} \underbrace{f(x)}_{<0 \vee >0} \underbrace{w_{z,\epsilon}(x)}_{>0} dx \neq 0$$

und dies ist ein Widerspruch, also $f = 0$. □

Wir wenden dies nun an auf einen Spezialfall des Sturm–Liouville–Randwertproblems, diesmal mit **natürlichen Randbedingungen**. Achtung: Im Folgenden betrachten wir immer dieses Beispiel, insbesondere seien die Voraussetzungen an p und q immer erfüllt.

Definition 18.13 (Sturm–Liouville–Modellproblem für Randwertprobleme)

$$-(py')'(t) + q(t)y(t) = f(t), y(a) = 0, y'(b) = 0$$

mit p stetig differenzierbar, q stetig, und

$$p(t) \geq p_0 > 0, q(t) \geq 0.$$

Nach den Vorbemerkungen aus dem letzten Kapitel vermuten wir, dass dieses Problem eine (eindeutige) Lösung hat. Aber zunächst wollen wir dieses Problem in eine Variationsgleichung umschreiben. Sei dazu $\varphi \in C^1([a, b])$ und y irgendeine Lösung der Differentialgleichung. Dann gilt mit Multiplikation mit φ und Integration

$$\int_a^b (-(py')'(t) + q(t)y(t))\varphi(t) dt = \int_a^b f(t)\varphi(t) dt$$

und damit mit partieller Integration

$$\underbrace{\int_a^b p(t)y'(t)\varphi'(t) + q(t)y(t)\varphi(t) dt}_{=:B(y,\varphi)} - [p \cdot y' \cdot \varphi]_a^b = \underbrace{\int_a^b f(t)\varphi(t) dt}_{=:F(\varphi)}.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt

Satz 18.14 Sei $X = \{u \in C^1([a, b]) : u(a) = 0\}$.

1. Falls $u \in X$ das Randwertproblem 18.13 erfüllt, so gilt

$$B(u, v) = F(v) \forall v \in X.$$

2. Falls

$$B(u, v) = F(v) \forall v \in X,$$

und $u \in C^2$, so ist u Lösung des Randwertproblems 18.13.

Beweis: Falls $u \in X$ Lösung von 18.13 ist, so ist $u'(b) = 0$. Sei $v \in X$, also $v(a) = 0$. Also fällt die eckige Klammer in der Vorbemerkung weg, und es gilt

$$B(u, v) = F(v).$$

Sei nun

$$B(u, v) = F(v) \forall v \in X.$$

Wähle ein v aus $C_0^\infty([a, b])$ beliebig. Dann gilt insbesondere $v(a) = v(b) = 0$ und $v \in X$. Wieder fällt die eckige Klammer in der Vorbemerkung weg, und es gilt

$$0 = B(u, v) - F(v) = \int_a^b ((-pu')'(t) + q(t)u(t) - f(t))v(t) dt = 0.$$

Nach 18.12 ist u damit Lösung der Differentialgleichung.

Da $u \in X$, gilt $u(a) = 0$.

Sei nun $v \in X$ mit $v(b) \neq 0$. Da u Lösung der Differentialgleichung ist, gilt nach der Vorbemerkung

$$0 = B(u, v) - F(v) = [p \cdot u' \cdot v]_a^b.$$

Da $v \in X$, gilt $v(a) = 0$. Also ist $p(b)u'(b)v(b) = 0$. Da $p(b) \geq p_0 > 0$ und $v(b) \neq 0$, muss gelten $u'(b) = 0$, also ist u Lösung des Randwertproblems. \square

Wir haben also unser Randwertproblem 18.13 in eine Variationsgleichung umgeschrieben.

Bemerkenswert daran ist, dass diese einen erweiterten Lösungsbegriff hat: Falls das Randwertproblem eine Lösung besitzt, so ist es äquivalent zum Variationsproblem. Falls das Randwertproblem keine Lösung besitzt, so kann es sein, dass das Variationsproblem trotzdem eine Lösung besitzt, wir haben hier also den Lösungsbegriff etwas erweitert. Vor dem physikalischen Hintergrund macht dies absolut Sinn, dort kommen durchaus Funktionen vor, die nicht in C^2 sind (und damit keine Lösungen der eigentlichen Differentialgleichung). Man spricht hier auch von einer schwachen Formulierung der Differentialgleichung.

Wir wollen nun noch einen Zusammenhang zwischen Lösung einer Gleichung und Minimierung beweisen. Dazu bemerken wir zunächst die folgenden Eigenschaften:

B ist bilinear, also linear in beiden Argumenten. $B(u, v) = B(v, u)$, also ist B symmetrisch. $B(u, u) \geq 0$, also ist B positiv semidefinit.

F ist stetig.

Mit diesen Eigenschaften beweisen wir

Satz 18.15 Sei

$$I : X \mapsto \mathbb{R}, I(u) := \frac{1}{2}B(u, u) - F(u).$$

I nimmt sein Minimum in $u \in X$ an genau dann, wenn

$$B(u, v) = F'(v) \forall v \in X.$$

Beweis: Seien $u, v \in X$. Wir definieren $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(\epsilon) &:= I(u + \epsilon v) \\ &= \frac{1}{2}B(u + \epsilon v, u + \epsilon v) - F(u + \epsilon v) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}B(u, u) - F(u)}_{=I(u)} + \epsilon B(u, v) + \underbrace{\frac{\epsilon^2}{2}B(v, v) - \epsilon F(v)}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

Falls

$$B(u, v) = F(v) \forall v \in X,$$

so gilt damit

$$I(u + \epsilon v) \geq I(u) \forall v \in X$$

und damit nimmt I sein Minimum in u an.

Falls I sein Minimum in u annimmt, so nimmt g sein Minimum an für $t = 0$. Also gilt $g'(0) = 0$, und damit

$$B(u, v) = F(v) \forall v \in X.$$

□

Bei diesem Beweis haben wir nur die oben genannten Eigenschaften benutzt. Wir schauen nun noch auf ein einfaches Beispiel.

Sei $X = \mathbb{R}^n$. Zu lösen sei die Aufgabe $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit. Es sei

$$B(x, y) := (Ax, y), \quad F(y) := (b, y).$$

Es gilt

$$B(x, y) = F(y) \forall y \in X \Rightarrow Ax = b.$$

Beweis: Setze $y = Ax - b$.

□

Das so definierte B ist bilinear, symmetrisch und positiv definit, F ist linear. Also gilt mit diesen Definitionen:

Satz 18.16 $x \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lösung von $Ax = b$, wenn

$$I(y) := \frac{1}{2}B(y, y) - F(y)$$

sein Minimum an der Stelle x annimmt.

Das heißt: Anstatt das Gleichungssystem zu lösen, können wir genausogut das Minimierungsproblem lösen. Dies ist der Ausgangspunkt für die Krylovraum-Verfahren, eine Klasse von iterativen Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen.

Im Folgenden werden wir nun das eigentliche Randwertproblem vergessen und nur noch die variationelle Formulierung betrachten.

18.4 Sobolevräume

Mit unseren Sätzen haben wir die Existenz einer Lösung des (schwachen) Randwertproblems auf die Existenz eines Minimierers von I zurückgeführt. Diese wollen wir beweisen. Üblicherweise geht man dabei so vor: Man zeigt, dass das Infimum I_0 von I endlich ist, und dass jede Minimalfolge, also eine Folge y_n mit

$$I(y_n) \rightarrow I_0,$$

eine Cauchyfolge ist. Aus der Vollständigkeit des Grundraums folgt dann die Existenz eines Minimierers. Leider ist unser Raum nicht einmal vollständig.

Dies gehen wir zunächst an. Wir wollen C^1 in L^2 vervollständigen, indem wir seinen Abschluss mit hinzunehmen. Bisher haben wir als einzige Eigenschaften der differenzierbaren Funktionen die partielle Integration genutzt. Es liegt also nahe, eine Erweiterung von C^1 als den Teilraum von L^2 zu definieren, in dem die partielle Integration erlaubt ist.

Definition 18.17 (schwache Differenzierbarkeit)

$v' \in L^2$ heißt schwache Ableitung von $v \in L^2$, falls $\forall \varphi \in C_0^\infty$

$$\int_a^b v(t)\varphi'(t)dt = - \int_a^b v'(t)\varphi(t)dt$$

und entsprechend für höhere Ableitungen.

Damit gilt natürlich insbesondere: Falls eine Funktion differenzierbar ist, so ist sie auch schwach differenzierbar und die Ableitungen sind gleich.

Beispiel 18.18 (schwache Differenzierbarkeit der Betragsfunktion)

$v(x) = |x|$ ist schwach differenzierbar auf $[-1, 1]$:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 |t| \varphi'(t) dt &= \int_{-1}^0 (-t) \varphi'(t) dt + \int_0^1 t \varphi'(t) dt \\
&= \int_{-1}^0 \varphi(t) dt + \int_0^1 -\varphi(t) dt + [t\varphi]_0^1 - [t\varphi]_{-1}^0 \\
&= - \int_{-1}^1 \varphi(t) \operatorname{sgn}(t) dt
\end{aligned}$$

Die (schwache) Ableitung der Betragsfunktion ist also die Signumfunktion. Für die Signumfunktion gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(t) \varphi'(t) dt &= - \int_{-1}^0 \varphi'(t) dt + \int_0^1 \varphi'(t) dt \\
&= -2\varphi'(0).
\end{aligned}$$

Dies lässt sich nicht als Integral schreiben, also ist die Signumfunktion nicht schwach differenzierbar, obwohl sie eine L^2 -Funktion ist. Es gilt also

$$H^1 \neq L^2.$$

Definition 18.19 (Sobolev-Räume)

Der Raum H^1 ist der Raum der schwach differenzierbaren Funktionen und heißt Sobolev-Raum. Auf H^1 definieren wir das Skalarprodukt

$$(f, g) = (f, g)_{L^2} + (f', g')_{L^2} = \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b f'(x)g'(x) dx$$

mit der zugehörigen Norm $\|f\|_{H^1}^2 = (f, f)$.

Satz 18.20 (Vollständigkeit der Sobolev-Räume)

H^1 ist vollständig.

Beweis: Sei (f_n) eine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_{H^1}$. Dann sind (f_n) und (f'_n) Cauchyfolgen bzgl. L^2 . L^2 ist vollständig, also gilt

$$f_n \rightarrow f, f'_n \rightarrow f', f, f' \in L^2.$$

Dann gilt für $\varphi \in C_0^\infty$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\varphi'(t)dt &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k(t)\varphi'(t)dt \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} - \int_a^b f'_k(t)\varphi(t)dt \\ &= - \int_a^b f'(t)\varphi(t)dt \end{aligned}$$

und damit ist f' schwache Ableitung von f .

$$\|f_n - f\|_{H^1}^2 = \|f_n - f\|_{L^2}^2 + \|f'_n - f'\|_{L^2}^2 \rightarrow 0$$

also konvergiert f_n gegen die schwach differenzierbare Funktion u bzgl. $\|\cdot\|_{H^1}$, also ist H^1 vollständig.

Tatsächlich ist H^1 der kleinste Raum mit dieser Eigenschaft, der C^1 enthält, also die Vervollständigung von C^1 bzgl. $\|\cdot\|_{H^1}$. \square

Zwei der wichtigsten Sätze über Sobolevräume sind die Sobolevsche Ungleichung und der Sobolevsche Einbettungssatz. In einer Dimension sind sie trivial.

Satz 18.21 (Sobolevsche Ungleichung)

Sei $f \in C^1$. Dann gibt es ein $C > 0$ mit

$$\|f\|_\infty \leq C\|f\|_{H^1}.$$

Beweis: Wir betrachten das Problem auf $[-1, 1]$. Sei zunächst $s \leq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(s) &= \int_0^1 ((t-1)f(t+s))' dt \\ &= \int_0^1 f(t+s) + (t-1)f'(t+s) dt \end{aligned}$$

und damit nach Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |f(s)| &\leq \left(\int_0^1 1 dt\right)^{1/2} \left(\int_{-1}^1 f(t)^2 dt\right)^{1/2} + \left(\int_0^1 (t-1)^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_{-1}^1 f'(t)^2 dt\right)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Für $s > 0$ betrachtet man $-t + s$ statt $t + s$ und bekommt dieselbe Ungleichung. \square

Satz 18.22 (H^1 -Funktionen sind stetig, Sobolevscher Einbettungssatz)

Sei $f \in H^1$. Dann gibt es eine stetige Funktion g mit $f = g$ f.ü., und

$$\|g\|_\infty \leq C\|f\|_{H^1}.$$

Beweis: Sei $f \in H^1$. Die Funktionen

$$f_n(s) = \frac{1}{M} \int_a^b w_{1/n,s}(t) f(t) dt = \frac{1}{M} \int_{s-1/n}^{s+1/n} w_{1/n,s}(t) f(t) dt, \quad M = \int_{\mathbb{R}} w(t) dt$$

liegen in C^∞ (Differentiation unter dem Integralzeichen). Sie konvergieren gegen f bzgl. H^1 , also sind sie insbesondere eine Cauchyfolge in H^1 . Dies sieht man anschaulich ein – ein einfacher, aber längerer Beweis für alle Dimensionen findet sich in Evans [2010], Anhang C.4.

Es gilt

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \|f_n - f_m\|_{H^1} \rightarrow 0,$$

sie sind also auch eine Cauchyfolge in C^0 bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. C^0 ist vollständig bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, also gilt

$$f_n \rightarrow g \text{ bzgl. } \|\cdot\|_\infty, \quad g \in C^0.$$

Damit konvergiert f_n aber auch gegen g bzgl. L^2 . f_n konvergiert also gegen g und f bezüglich L^2 , also gilt $f = g$ f.ü. Weiter ist

$$\|g\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_\infty \leq C \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{H^1} = C\|f\|_{H^1}.$$

□

Der Sobolevsche Einbettungssatz hat eine wichtige Folgerung. Wir haben die H^1 -Funktionen als L^2 -Funktionen definiert. Damit besitzen sie keine Punktauswertung: L^2 -Funktionen dürfen auf Nullmengen undefiniert werden, ohne dass sie sich ändern. Da jetzt aber ohne Einschränkung jede H^1 -Funktion stetig ist, können wir sie an Punkten auswerten.

Wir kommen zu einer der wichtigsten Ungleichungen für die Variationsrechnung.

Satz 18.23 (Poincaré-Ungleichung)

Sei

$$X = \{v \in H^1 : v(a) = 0\}.$$

Dann gibt es eine Konstante $C > 0$ mit

$$\|v\|_{L^2}^2 \leq C\|v'\|_{L^2}^2 \quad \forall v \in X.$$

Beweis: Mit Cauchy–Schwarz:

$$\begin{aligned}(v(t))^2 &= \left(\int_a^t v'(s) \, ds \right)^2 \\ &\leq \int_a^t 1 \, ds \cdot \int_a^t v'(s)^2 \, ds \\ &\leq (t-a) \|v'\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\|v\|_{L^2}^2 &= \int_a^b v(t)^2 \, dt \leq \int_a^b (t-a) \|v'\|_{L^2}^2 \, ds \, dt \\ &= \frac{1}{2} (b-a)^2 \|v'\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

□

18.5 Existenz– und Eindeutigkeitsatz für das Sturm–Liouville–Modellproblem

Satz 18.24 (Lösbarkeit des Sturm–Liouville–Problems)

Sei

$$X := \{y \in H^1 : y(a) = 0\}$$

versehen mit der Norm

$$\|\cdot\|_X := \|\cdot\|_{H^1}.$$

Sei wieder wie in 18.13

$$B(v, w) = \int_a^b p(t)v'(t)w'(t) + q(t)v(t)w(t) \, dt \quad \forall v, w \in X$$

und

$$F(v) = \int_a^b f(t)v(t) \, dt$$

sowie

$$I(v) = \frac{1}{2}B(v, v) - F(v).$$

Dann hat I in X einen eindeutigen Minimierer, und damit das Randwertproblem eine (schwache) Lösung.

Mit dem Darstellungssatz von Riesz aus der Funktionalanalysis zeigt man leicht das Lemma von Lax–Milgram (z.B. in Alt [2007]), und hieraus folgt mit den gezeigten Sätzen die eindeutige Lösbarkeit des Variationsproblems. Wir zeigen den Satz zu Fuß.

Beweis: Wir beweisen zunächst: $B(u, v)$ ist ein Skalarprodukt auf X . Bilinearität usw. sind offensichtlich für B erfüllt. Bleibt zu zeigen:

$$\|v\|_B^2 := B(v, v) = 0 \iff v = 0$$

und damit ist $\|v\|_B$ die zugehörige Norm. Nach Voraussetzung an p und q gilt

$$\|v\|_B^2 \geq p_0 \|v'\|^2$$

also insbesondere

$$\|v\|_B = 0 \Rightarrow v = 0.$$

Nach Definition von B gilt

$$\|v\|_B^2 \leq \|p\|_\infty \|v'\|_{L^2}^2 + \|q\|_\infty \|v\|_{L^2}^2 \leq \max(\|p\|_\infty, \|q\|_\infty) \|v\|_{H^1}.$$

Mit Poincaré gilt weiter

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^1}^2 &= \|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2 \\ &\leq (C + 1) \|v'\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{C + 1}{p_0} \|v\|_B^2. \end{aligned}$$

Damit ist $\|\cdot\|_B$ eine zu $\|\cdot\|_{H^1}$ äquivalente Norm. Der Konvergenzbegriff bezüglich der Normen ist der gleiche, insbesondere ist X vollständig bezüglich beider Normen.

Wir zeigen nun, dass $I(v)$ nach unten beschränkt ist. Mit Cauchy-Schwarz und Poincaré gilt

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{1}{2} \|v\|_B^2 - \int_a^b f(t)v(t) dt \\ &\geq \frac{p_0}{2} \|v'\|_{L^2}^2 - \|f\|_{L^2} \cdot \|v\|_{L^2} \\ &\geq \frac{p_0}{2} \|v'\|_{L^2}^2 - C \|f\|_{L^2} \cdot \|v'\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist eine quadratische Funktion in $\|v'\|_{L^2}$, $p_0 > 0$, also ist I nach unten beschränkt und hat ein Infimum $I_0 > -\infty$.

Noch zu zeigen: Das Infimum wird angenommen.

Für jedes $k > 0$ gibt es ein $v_k \in V$, so dass

$$I_0 \leq I(v_k) < I_0 + 1/k,$$

denn I_0 ist Infimum von I . Insbesondere gilt für diese Folge

$$I(v_k) \rightarrow I_0.$$

Wir wollen zeigen, dass v_n eine Cauchyfolge ist. Dazu gibt es einen Standardtrick aus der Linearen Algebra mit Hilfe der Parallelogrammidentität (siehe z.B. Alt [2007], S. 97)

$$\|u + v\|_B^2 + \|u - v\|_B^2 = 2\|u\|_B^2 + 2\|v\|_B^2.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{1 + C^2} \|v_n - v_m\|_{H^1}^2 &\leq \|v_n - v_m\|_B^2 \\ &= 2\|v_n\|_B^2 + 2\|v_m\|_B^2 - \|v_n + v_m\|_B^2 \\ &= 4\left(\frac{1}{2}\|v_n\|_B^2 - F(v_n)\right) + 4\left(\frac{1}{2}\|v_m\|_B^2 - F(v_m)\right) \\ &\quad - 8\left(\frac{1}{2}\left\|\frac{v_n + v_m}{2}\right\|_B^2 - F\left(\frac{v_n + v_m}{2}\right)\right) \\ &= 4I(v_n) + 4I(v_m) - 8I\left(\frac{v_n + v_m}{2}\right) \\ &\leq 4I(v_n) + 4I(v_m) - 8I_0 \\ &\rightarrow_{n,m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Also ist v_n eine Cauchyfolge und konvergiert gegen ein $v \in X$, denn X ist vollständig.

Noch zu zeigen:

$$I(v) = I_0.$$

B und F sind stetig, denn mit Cauchy-Schwarz gilt

$$|B(u, v)| \leq \|p\|_\infty \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + \|q\|_\infty \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

und

$$|F(v)| \leq \|q\|_{L^2} \|f\|_{L^2}^2 \|v\|_{L^2}^2.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} I(v) - I(v_n) &= \frac{1}{2}(B(v, v) - B(v_n, v_n)) + F(v - v_n) \\ &= \frac{1}{2}((B(v, v) - B(v_n, v)) + (B(v_n, v) - B(v_n, v_n)) + F(v - v_n)) \\ &\rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

und damit $I(v) = I_0$. □

18.6 Numerische Verfahren für variationelle Probleme

Nun können wir ein numerisches Verfahren zur Lösung von Randwertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen mit Variationsmethoden definieren.

Definition 18.25 Ritz–Galerkin–Verfahren

Sei X_h ein endlichdimensionaler Teilraum von X . $y_h \in X_h$ heißt Galerkin–Lösung, falls y_h I auf X_h minimiert.

Die approximative Lösung y_h lässt sich leicht berechnen. Nach unseren Vorbemerkungen ist sie gleichzeitig Lösung von

$$B(y_h, v) = F(v) \quad \forall v \in X_h.$$

Hierzu müssen wir nur in den Vorbemerkungen $X = X_h$ setzen. Sei nun v_0, \dots, v_n eine Basis von X_h . Die Existenz einer Lösung $u_h \in X_h$ ist sichergestellt wieder nach unseren Vorbemerkungen. Sei also

$$y_h = \sum_k \alpha_k v_k.$$

B ist linear im ersten und zweiten Argument, F ist linear, es reicht daher y_h so zu wählen dass

$$\sum_j B(u_k, u_j) \alpha_j = B(y_h, v_k) = F(v_k), \quad \forall k = 0 \dots n.$$

Die α_j erfüllen also ein lineares Gleichungssystem. Wir setzen

$$B \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}, \quad B_{k,j} = B(v_k, v_j), \quad F \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad F_k = F(v_k), \quad \alpha \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (\alpha)_k = \alpha_k$$

und erhalten das lineare Gleichungssystem

$$B\alpha = F.$$

Da es immer ein y_h gibt, das das Gleichungssystem löst, ist B surjektiv und damit invertierbar.

Mit Hilfe der Sätze können wir leicht die Konvergenz des Galerkin–Verfahrens in der Supremumsnorm nachweisen.

Satz 18.26 (Konvergenz des Galerkin–Verfahrens und Fehlerabschätzung)

Sei (X_h) eine Folge von Räumen mit

$$\min_{x \in X_h} \|y - x\|_{H^1} = d(y, X_h) \rightarrow 0 \forall y \in X.$$

Dann konvergiert y_h gegen y bezüglich der Supremumsnorm.

Es gibt eine Konstante C , die nicht von h abhängt, mit

$$\|y - y_h\|_\infty \leq C d(y, X_h).$$

Beweis: Sei y die Lösung des Variationsproblems auf X , y_h die Lösung auf X_h . Da $X_h \subset X$ gilt

$$B(y_h, v) = F(v) = B(y, v) \Rightarrow B(y_h - y, v) = 0 \forall v \in X_h.$$

B ist ein Skalarprodukt, also gilt mit dieser Beziehung und Cauchy–Schwarz

$$\begin{aligned} \|y - y_h\|_B^2 &= B(y - y_h, y - y_h) \\ &= B(y - y_h, y) && y_h \in X_h \\ &= B(y - y_h, y - v) && v \in X_h \text{ beliebig} \\ &\leq \|y - y_h\|_B \cdot \|y - v\|_B. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also

$$\|y - y_h\|_B \leq \|y - v\|_B.$$

Da die B –Norm und die H^1 –Norm äquivalent sind, gilt

$$C_1 \|y - y_h\|_{H^1} \leq \|y - y_h\|_B \leq \|y - v\|_B \leq C_2 \|y - v\|_{H^1}$$

oder mit $C = C_2/C_1$

$$\|y - y_h\|_{H^1} \leq C \|y - v\|_{H^1}.$$

Da $v \in X_h$ beliebig war, folgt schon mal

$$\|y - y_h\|_{H^1} \leq C \inf_{v \in X_h} \|y - v\|_{H^1} = C d(y, X_h)$$

und damit

$$y_h \rightarrow_{H^1} y.$$

Dies ist noch nicht ganz das Gewünschte: Das ist nur eine Konvergenz bezüglich der H^1 -Norm.

Aber mit den bewiesenen Sätzen gilt

$$\begin{aligned} \|y - y_h\|_\infty &\leq C' \|y - y_h\|_{H^1} \quad (\text{Sobolev 18.21}) \\ &= C C' d(y, X_h). \end{aligned}$$

□

Überzeugend an dieser Vorgehensweise ist, dass dieser Beweis deutlich eleganter ist als die Beweise für die Diskretisierung etwa bei den M -Matrizen: Die Konvergenz gilt unabhängig von der Art der Diskretisierung für alle Sturm-Liouville-Probleme, die die Voraussetzungen erfüllen.

Der Satz sagt: Die Qualität der Näherungen y_h hängt davon ab, wie gut die Teilräume X_h den Raum X bezüglich der H^1 -Norm approximieren. Wir haben die Aufgabe der Lösung der Differentialgleichung auf die Aufgabe, die Approximationsgüte von linearen Unterräumen zu bestimmen, zurückgeführt und damit von der Differentialgleichung (bis auf eine Konstante) abgekoppelt.

Im Kapitel über Interpolation haben wir unter anderem die folgenden Möglichkeiten kennengelernt, Funktionen in X zu approximieren:

1. Polynome: Wir wählen als $X_{1/n}$ den Polynomraum \mathcal{P}_n mit $p(a) = 0$.
2. Trigonometrische Polynome (Fouriertransformation): Hier wählen wir als Ansatzfunktionen $\sin(kt)$ und $\cos(kt)$.
3. Splines: Diese hatten die deutlich besten Approximationseigenschaften. Sie sind das Standardwerkzeug zur Lösung von Variationsproblemen.

Nach den Vorbemerkungen müssen wir bei der Lösung der Variationsgleichung folgende Schritte erledigen.

1. Wähle einen endlichdimensionalen Teilraum X_h von X .
2. Bestimme eine Basis $v_0 \dots v_n$ von X_h .
3. Berechne die Matrizen B (Steifigkeitsmatrix) und F (Lastvektor).
4. Löse das Gleichungssystem $B\alpha = F$.
5. Setze $y_h = \sum_{j=0}^n \alpha_j v_j$.

Die Schritte 3 und 4 können sehr aufwändig sein. Es wäre daher günstig, wenn B dünn besetzt wäre. Dies ist für Splines der Fall.

Wir wollen uns hier als Beispiel die Lösung der Poissongleichung auf dem Intervall $[0, 1]$ als variationelles Problem mit Splines der Ordnung 2 anschauen. Dieser Spliner Raum besteht aus den stückweise linearen, stetigen Funktionen auf einem Intervall. Sei $x_0 \dots x_n$ ein äquidistantes Gitter auf $[0, 1]$ mit der Gitterweite $h = 1/n$. Wir setzen

$$\varphi_k(x_j) = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und linear interpoliert zwischen diesen Punkten. Dann ist $\varphi_1 \dots \varphi_n$ eine Basis des Raums der Splines der Ordnung 2 mit $\varphi(0) = 0$. Der Träger der φ_k ist (x_{k-1}, x_{k+1}) , und es gilt

$$\varphi'_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{h} & t \in (x_{k-1}, x_k) \\ -\frac{1}{h} & t \in (x_k, x_{k+1}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die Poissongleichung ist $p = 1$ und $q = 0$. Falls $|j - k| > 1$, so überschneiden sich die Träger von φ_j und φ_k nicht, d.h. es gilt sofort

$$B_{k,j} = B(\varphi_k, \varphi_j) = 0$$

und damit besitzt B nur Einträge auf der Hauptdiagonalen und den beiden Nebendiagonalen. Durch Einsetzen gilt sofort

$$B_{k,k} = \frac{2}{h}, \quad B_{k,k+1} = B_{k+1,k} = -\frac{1}{h}.$$

Weiter gilt

$$F_k = F(v_k) = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(t)v_k(t) dt \sim hf(x_k)$$

Das zu lösende Gleichungssystem und damit die Approximation y_h ist also am Ende genau die gleiche wie in 18.2. Dies scheint zunächst ein frustrierendes Ergebnis zu sein. Aber durch die völlig andere Herleitung bekommen wir hier die Konvergenz und alles andere geschenkt: Im Abschnitt über Splines haben wir gezeigt, dass $d(y, X_h) = O(h^2)$, also ist auch die Konvergenzordnung dieses Verfahrens 2. Dies ist natürlich das gleiche Ergebnis wie das in 18.2 mit Hilfe der M -Matrizen gezeigte.

Kapitel 19

Errata

19.1 Errata 2021

- Abschnitt 3.2, Fehlerverstärkung: Beim Faktor fehlte die Tilde. Im Limes stand statt $f'(y) M$.
- Abschnitt 3.5, Induzierte Matrixnorm, Motivation: Die Motivation war ohne die Vorlesung unverständlich, denn \tilde{A} usw. wurden nicht eingeführt. Definition eingefügt.
- Abbildung 3.1, den Text zur Abbildung klarer formuliert.
- Korollar 3.14, exakter formuliert, Index von n nach k geändert.
- Satz 3.18, Bemerkung zur Norm hinzugefügt.
- Hinter Definition 8.1: Die Durchführung der Potenzmethode war unklar, hier auf Wunsch der Studierenden einen zusätzlichen Absatz eingefügt.
- Abbildung 3.1 war sehr ungünstig platziert. Ist auch jetzt nicht optimal.
- Fehler in Fall 2 im Beweis zu 6.17. Da stand $(Bx)_m$, das ist natürlich ein $(Bx)_i$.
- Beweis zu 11.6, Teil 4, vorletzte Zeile: Fehlendes dt hinzugefügt.
- Definition 12.4: Klarer gemacht, dass die Gitterfolge eine Folge ist, h durch h_k ersetzt.
- Satz 17.5: Formulierung des Satzes korrigiert (konsistent fehlte) und den Beweis der Vorlesung im Skript nachgetragen.

- Satz 15.5 korrigiert: In Zeile 2 fehlte der Strich von y' , dies korrigiert und anschließend nochmal y' durch f ersetzt. In Satz 15.5 noch ein mindestens eingefügt.
- Satz 5.8: Definition von A in den Satz eingefügt, um ihn klarer zu machen.
- Satz 17.2/17.3: Die Ungleichungen für y_h waren falsch herum.

19.2 Errata 2020

- Abschnitt 1.3, Federbeispiel: In der zweiten Gleichung fehlte bei der Dämpfung das m im Nenner.
- Abschnitt 1.2, Seite 8, Berechnung von y_1 : Stand 0 statt a
- Abschnitt 3.4, Stabilität: War $\text{eps} = 0.005$, ist jetzt $\text{eps} = 0.05$.
- Abschnitt 3.3, Maschinendarstellung, nach Satz 3.8: War $\text{eps} \sim 10^{-23}$, ist jetzt 10^{-16} (wie in der Einführung ausgerechnet)
- Rechnung vor 3.16: x, y kommen aus dem \mathbb{C}^n , und deshalb fehlte bei der Berechnung von (x, y) das konjugiert über dem β_k .
- Nach Satz 4.7 ergänzt: P, L, R aus den Beispielen angegeben.
- Definition 3.16: A in B geändert.
- Vor Definition 3.11: $\forall db \in \mathbb{R}^n$, da fehlte das db .
- Beispiel 5.4 Punkt 1: Es fehlte ein L bei $mL = (1, \dots, 1)^t(1, \dots, 1)L = \dots$
- Beweis zu Satz 5.6: Bei der Berechnung von A^tAx^+ musste ganz am Ende der Zeile A^tb statt nur b stehen.
- Definition 5.1 der Formulierung in der Vorlesung angepasst.
- Satz 5.8: Bei der Definition von A^+ waren n und m vertauscht.
- Beispiel 5.4: $*$ in t geändert.
- Satz 6.5, Beweis: f in g geändert.
- Definition 6.16, schwache Diagonaldominanz: \geq in \leq geändert.
- Beweis zu Satz 7.2: Beim Einsetzen der Taylorformel war ein $\frac{1}{2}$ und ein Quadrat verlorengegangen.
- Beweis zu Satz 9.6: In der Mitte des Beweises $w^{N+1}(x) = (N + 1)!$, nicht p .

- Satz 9.6: War richtig so, aber man schreibt hier besser \bar{x} statt x nach Insbesondere gilt.
- Satz 10.1: Bei Punkt 3 fehlte der Strich in $p'(x)$. Bei Punkt 4 fehlten Klammern.
- Beweis zu Satz 10.3: Hier stand am Anfang \mathcal{P}_n statt \mathcal{P}_N .
- Vor Satz 10.4: Stand ein Gleichheitszeichen bei der Einsetzung der Simpson-Regel. Sollte ein \sim sein.
- Satz 10.2: Hier fehlte die Angabe des Grundintervalls $[a, b]$ in allen Teilen.
- Beispiele zu Richardson, Kapitel 10.3: Beispiel der Trapezregel zu rechtsseitigem Differenzenquotienten geändert. Romberg/Trapezregel als neues Beispiel eingeführt.
- Beweis zu 10.2: Für $f(x - h)$ musste $-h^3/6$ stehen.
- Richardson 10.3, Untersuchung der Genauigkeit: Taylorentwicklung für $h/2$ korrigiert.
- Definition 12.5, Klassifikation der numerischen Verfahren: Bei allen Verfahren fehlte ein h vor dem φ . Es ist zwar so nicht falsch, passt aber dann nicht mehr zu den weiteren Untersuchungen.
- Satz 6.10: Hier fehlten Normstriche in der ersten Ungleichung des Beweises.

Literaturverzeichnis

- H.W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer London, Limited, 2007. ISBN 9783540341871. URL http://books.google.de/books?id=TzeMiSx8_14C.
- L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2010. ISBN 9780821849743. URL http://books.google.de/books?id=XnuOo_EJrCQC.
- R.W. Freund and R.H.W. Hoppe. *Stoer/Bulirsch: Numerische Mathematik 1*. Springer-Lehrbuch. Springer London, Limited, 2007. ISBN 9783540453901. URL <http://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-45390-1/page/1>.
- E. Hairer, S.P. Nørsett, and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Solving Ordinary Differential Equations. Springer, 1993. ISBN 9783540566700. URL <http://books.google.de/books?id=F93u7VcSRyYC>.
- M. Hanke-Bourgeois. *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*. Mathematische Leitfäden. Teubner, 2006. ISBN 9783835100909. URL <http://books.google.de/books?id=tKrhTUyNEoC>.
- Carl Runge and Hermann König. *Vorlesungen über numerisches Rechnen*. Springer Göttingen, 1925. URL <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN373207646>.

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Tangente an e^x im Punkt $x = 0.5$. Auf dem kleinen Intervall ist die Tangente eine gute Approximation für e^x | 10 |
| 3.1 | Graphische Lösung von Gleichungssystemen | 34 |
| 5.1 | Beispiel zur Ausgleichsgeraden | 49 |
| 11.1 | Kegel $K_M(a, y_0)$ | 98 |

Listings